MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pre žiakov základných škôl
a nižších ročníkov osemročných gymnázií

Milí žiaci,

máte radi zaujímavé matematické úlohy a chceli by ste si zasúťažiť v ich riešení? Ak áno, zúčastnite sa Matematickej olympiády (MO). Súťaž je dobrovoľná a nesúvisí s klasifikáciou z matematiky. Matematická olympiáda má niekoľko kategórií. V tomto letáku nájdete úlohy, ktoré sú určené žiakom základných škôl (ZŠ) a prvých štyroch ročníkov osemročných gymnázií (OG).

Kategória **Z9**
je určená pre žiakov 9. ročníka ZŠ a 4. ročníka OG.

Kategória **Z8**
je určená len pre žiakov 8. ročníka ZŠ .

Kategória **Z7**
je určená pre žiakov 7. ročníka ZŠ a 3. ročníka OG.

Kategória **Z6**
je určená pre žiakov 6. ročníka ZŠ a 2. ročníka OG.

Kategória **Z5**
je určená pre žiakov 5. ročníka ZŠ a 1. ročníka OG.

Kategória **Z4**
je určená pre žiakov 4. ročníka ZŠ.

So súhlasom svojho učiteľa matematiky môžete súťažiť i v *niektorej* kategórii určenej pre vyšší ročník (aj v kategórii Z8), alebo v kategóriách **A**, **B**, **C** a **P**, ktoré sú určené pre žiakov stredných škôl (úlohy sú uverejnené v letákoch MO pre stredné školy).

Priebeh súťaže

Kategória Z4 pozostáva z domáceho a školského kola, kategórie Z5, Z6, Z7, Z8 z domáceho a okresného kola, kategória Z9 z domáceho, okresného a krajského kola.

V rámci domáceho kola riešite 6 úloh, ktoré sú v tomto letáku. **Riešenia úloh odovzdajte svojim učiteľom matematiky najneskôr v týchto termínoch:**

kategória	jedna trojica úloh	druhá trojica úloh
Z4, Z5, Z9	3. november 2003	15. december 2003
Z6, Z7, Z8	1. december 2003	27. február 2004

Vaši učitelia vám riešenia opravia a ohodnotia podľa stupnice: 1 - *výborne*, 2 - *dobre*, 3 - *nevyhovuje*.

Úspešným riešiteľom domáceho kola sa stáva žiak, ktorý bude mať ohodnotené aspoň 4 úlohy stupňom aspoň *dobre*. Práce všetkých úspešných riešiteľov kategórií Z5 - Z9 zašle vaša škola okresnej komisii MO. Ten z nich vyberie najlepších riešiteľov a pozve ich do okresného kola. V rámci neho riešite úlohy podobného rázu ako v domácom kole, avšak klauzúrne, to znamená, že na riešenie máte k dispozícii obmedzený čas, (v kategórii Z5, Z6, Z7, Z8 - 2 hodiny, v kategórii Z9 - 4 hodiny) a nemôžete využívať cudziu pomoc. V kategórii Z4 sa úspešní riešitelia domáceho kola zúčastnia školského klauzúrneho kola. Najlepší riešitelia okresného kola kategórie Z9 budú pozvaní do krajského kola.

Termíny:

kategória	**II. kolo**	**III. kolo**
Z4	*28. január 2004*	-------
Z5	*28. január 2004*	-------
Z6-Z8	*7. apríl 2004*	-------
Z9	*28. január 2004*	*17. marec 2004*

Pokyny a rady súťažiacim

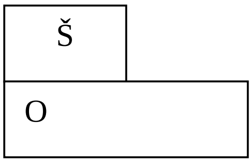
Riešenie súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Jozef Plachý, 7.C
ZŠ Hodžova ul. 5, 949 01 Nitra
Úloha Z7-I-2

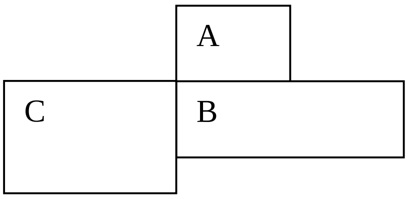
Riešenie píšte tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup, podrobne vysvetlite, ako ste uvažovali. Uvedomte si, že sa hodnotí nielen výsledok, ku ktorému ste došli, ale hlavne správnosť úvah, ktoré k nemu viedli. Práce, ktoré nebudú spĺňať tieto podmienky, alebo budú odovzdané po termíne, nebudú do súťaže prijaté.

Z4-I-1

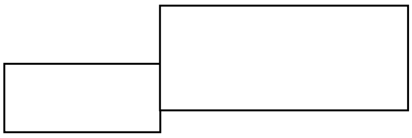
Keď sa dva obdĺžniky skamarátia, pritisnú sa stranami k sebe tak, aby mali aspoň jeden vrchol spoločný.



Tu sa kamaráti obdĺžnik Š s obdĺžnikom O.



Tu sa kamaráti obdĺžnik A s obdĺžnikom B a obdĺžnik B s obdĺžnikom C, ale nie obdĺžnik A s obdĺžnikom C.



Tieto dva obdĺžniky sa neskamarátili.

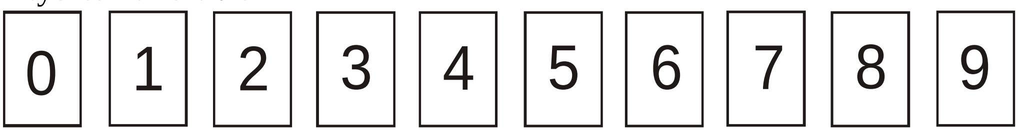
Obr. 1

Minule sa skamarátili 3 obdĺžniky – každý s každým. Prvý mal rozmery 3 cm × 7 cm, druhý 5 cm × 8 cm a tretí 2 cm × 8 cm. Aký najväčší obvod môže mať obrazec, ktorý skamarátením spolu vytvorili?

(Dillingerová)

Z4-I-2

Z týchto 10 kartičiek



sme vybrali 6 tak, aby sa z nich dali zostaviť dve trojciferné čísla, pre ktoré súčasne platí:

- Jedno z nich sa dá deliť deviatimi bezo zvyšku,
- ich súčet je číslo zapísané len nepárnymi ciframi.

Nájdi tie dve trojciferné čísla, ktoré spĺňajú obe podmienky a naviac ich súčet je čo najväčší.

(Dillingerová)

Z4-I-3

Zuzka má vo vrecúšku 15 červených, 3 zelené a 8 modrých guľôčiek. Na jedno siahnutie do vrecúška vytiahne bez pozerania sa 2 guľôčky a už ich nevráti.

Najmenej koľkokrát musí siahnuť do vrecúška, aby medzi vytiahnutými guľôčkami určite bola aspoň 1 zelená?

Najmenej koľkokrát musí siahnuť do vrecúška, aby aspoň raz vytiahla dvojicu červených guľôčiek?

(Dillingerová)

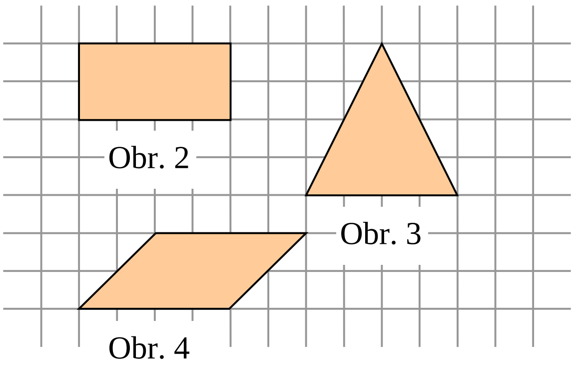
Z4-I-4

Miško rozstrihal obdĺžnik na obrázku 2 na niekoľko trojuholníčkov. Zo všetkých týchto trojuholníčkov dokáže poskladať veľký trojuholník z obrázka 3. Zo všetkých týchto trojuholníčkov dokáže tiež poskladať rovnobežník z obrázka 4.

Zisti, ako Miško strihal, ak počet trojuholníčkov bol

a) 4,

b) 3.



(Pre zadania *a)* aj *b)* nakresli čiary, po ktorých mohol Miško strihať. Ďalej nakresli trojuholník z obr. 3 zložený z malých trojuholníčkov aj rovnobežník z obr. 4 poskladaný z malých trojuholníčkov. Pri skladaní sa trojuholníčky nesmú prekrývať, a poskladané útvary nesmú byť deravé.)

(Dillingerová)

Z4-I-5

Kvetka aj Gabika chovajú škrečky. Včera mala Kvetka o 10 škrečkov viac ako Gabika. Cez noc sa aj u Kvetky aj u Gabiky narodilo po 5 škrečkov, takže teraz má Kvetka dvakrát toľko škrečkov ako Gabika. Koľko škrečkov má Kvetka a koľko má Gabika?

(Dillingerová)

Z4-I-6

Škriatok Matík má veľmi rád matematiku. Včera objavil dlhý plot s 2004 latkami a popísal ho opakovane slovom „matematika“ kriedou . Na každú latku počnúc prvou a končiac poslednou napísal jedno písmeno: Najprv M, potom A, T, E, M, A, T, I, K, A, M, A, T, E, atď. Ktoré písmeno bolo na poslednej latke? Koľkokrát napísal písmeno M?

(Dillingerová)

Z5-I-1

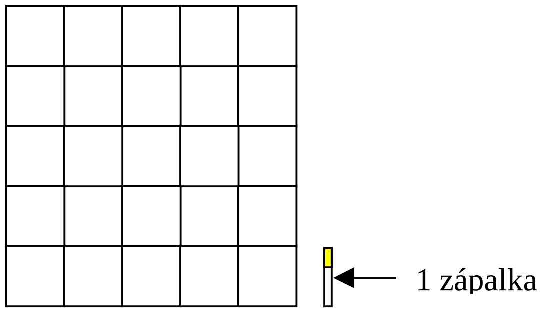
Viacciferné číslo, ktorého číslice sa v smere zľava doprava zväčšujú (t.j. počet jednotiek je väčší ako počet desiatok, počet desiatok je väčší ako počet stoviek, počet stoviek…), sa volá *rastúce*. Napríklad číslo 2459 je *rastúce*, ale číslo 2354 *rastúce* nie je.
Všetky existujúce rastúce čísla sme správne usporiadali od najväčšieho po najmenšie a prvých 10 sme sčítali. Čo nám vyšlo, ak sme počítali správne?

(Bednářová)

Z5-I-2

Útvar na obrázku č.1 je zložený zo zápaliek.
a) Koľko zápaliek bolo naň použitých ?
b) Koľko zápaliek treba z tohoto obrazca odobrať, aby vzniklo presne 12 štvorcov (strana štvorčeka = 1 zápalka), ktoré sa navzájom môžu dotýkať len vo vrcholoch? Nakresli ako potom obrazec vyzeral.

(Tlustý)



Obr. 1

Z5-I-3

Vedci vyšľachtili nový ovocný strom a nazvali ho HRUŠBLOŇ. Na jednom takomto strome rastú súčasne hrušky aj jabĺčka ale nič iné. Pritom jabĺk je vždy dvakrát viac ako hrušiek. O hrušbloni je ešte známe, že sa na nej neurodí ročne menej ako 77 ani viac ako 88 plodov.
a) Koľko najmenej jabĺk získame ročne z jednej rodiacej hrušblone?
b) Môžeme mať z 55 hrušbloní úrodu 1600 hrušiek?

(Bednářová)

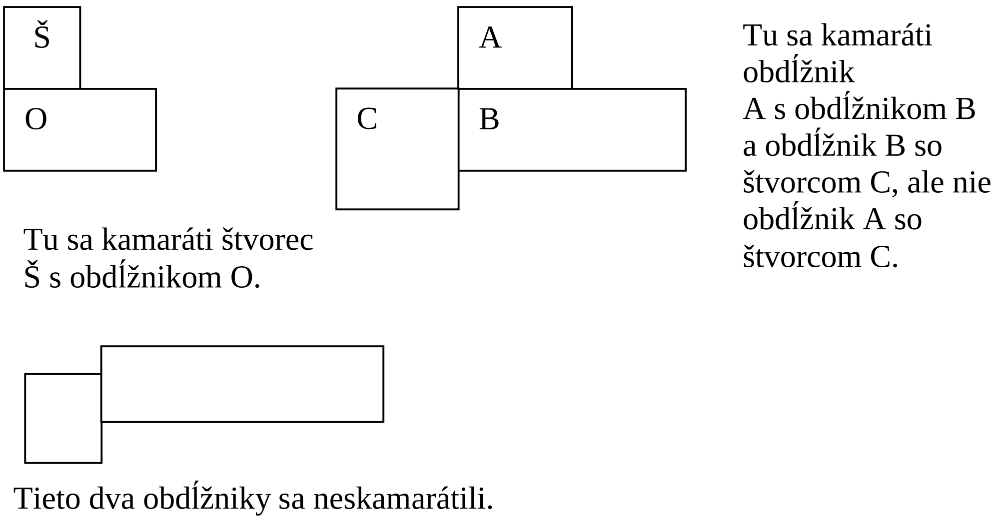
Z5-I-4

Z čísel 3 256 871 a 4 589 238, ktoré spolu obsahujú 14 číslic, vyškrtnite spolu 5 číslic tak, aby súčet vzniknutých čísel bol čo najmenší.

(Bednářová)

Z5-I-5

Keď sa dva obdĺžniky skamarátia, pritisnú sa stranami k sebe tak, aby mali aspoň jeden vrchol spoločný (Obr. 2).



Obr. 2

Štvorec so stranou dĺžky 6 cm sa skamarátil s obdĺžnikom so stranami dĺžok 7 cm a 9 cm. Potom si ešte našli ďalší štvorec, s ktorým sa obaja skamarátili. Aké rozmery mohol mať tento štvorec? Nájdi všetky možnosti. (Štvorec je špeciálny prípad obdĺžnika a platí preň rovnaké pravidlo na skamarátenie sa.)

(Dillingerová)

Z5-I-6

Myslím si číslo. Po jeho zaokrúhlení na desaťtisícky dostanem číslo 20 000. Pri zaokrúhľovaní na desiatky sa moje myslené číslo nezmení, pri zaokrúhľovaní na tisícky sa zväčší o 20, pri zaokrúhľovaní na stovky tiež. Aké číslo si môžem myslieť? Napíš všetky možnosti.

(Bednářová)

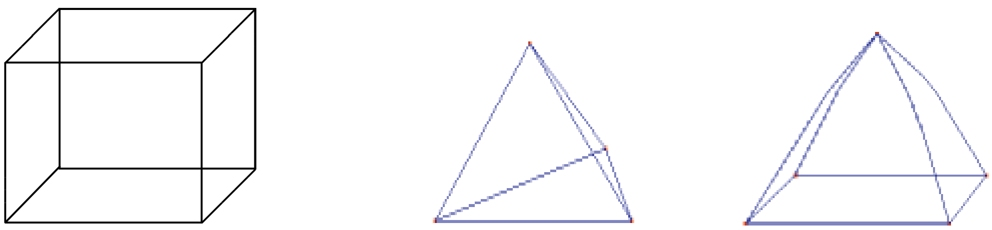
Z6-I-1

Cik-cak čísla sú také prirodzené čísla, v ktorých sa striedajú párne a nepárne číslice, pričom žiadne dve z nich nie sú rovnaké. Ktoré *cik-cak* číslo bude 1., 5. a 10. v poradí, ak všetky *cik-cak* čísla napíšeme usporiadané od najväčšieho po najmenšie?

(Bednářová)

Z6-I-2

Pán učiteľ vyrobil drôtené modely kocky, štvorstena a pravidelného štvorbokého ihlana (obr. č. 1). Všetky hrany týchto telies majú rovnakú dĺžku a ich dĺžka vyjadrená v centimetroch je zapísaná celým číslom. Na zhotovenie kocky spotreboval pán učiteľ viac ako 45 cm drôtu, na ihlan mu stačilo menej ako 35 cm. Koľko centimetrov drôtu (presne) spotreboval na výrobu štvorstena?



Obr. 1

(Bednářová)

Z6-I-3

Miška cestuje k babke vlakom. Zvyčajne odchádza rýchlikom o 9:23 a o 153 minút neskôr vystúpi na stanici, kde čaká na osobný vlak. Dnes rýchlik pri odjazde z Miškinho bydliska meškal 12 minút. Toto meškanie počas jazdy zväčšil dvojnásobne a neskôr zmenšil o 15 minút. Takto ostalo Miške do riadneho odchodu osobného vlaku len 7 minút. Presne o koľkej má mať osobný vlak odchod?

(Dillingerová)

Z6-I-4

Napíš nasledujúcim spôsobom všetky čísla od 1 do 60 za sebou:

1 2 3 … 58 59 60.

Zo získaného čísla vyškrtni 100 cifier tak, aby si získal najväčšie možné číslo.

(Volfová)

Z6-I-5

Rozdeľ obdĺžnik s rozmermi 27 cm a 12 cm

a) na tri obdĺžniky,

b) na dve časti,

tak, aby z nich bolo možné zložiť štvorec (diely sa nesmú prekrývať).

(Volfová)

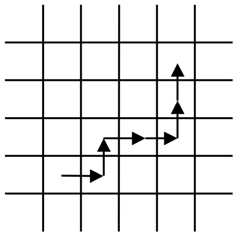
Z6-I-6

Zvolím si nejaké číslo a ťahám figúrkou po štvorčekovom papieri podľa nasledujúceho pravidla: Dané číslo vydelím dvomi. Ak vyjde zvyšok nula, posuniem figúrku o jeden štvorček dohora. Ak vyjde iný zvyšok, ťahám figúrkou o jeden štvorček doprava. Po posunutí figúrky vezmem podiel a opäť ho delím dvomi. Figúrkou posúvam podľa toho istého pravidla a pokračujem takto ďalej.

a) Vybral som si číslo 89. Znázorni prvých päť ťahov figúrkou pre toto číslo a napíš posledný podiel.

b) Ťahal som figúrkou tak, ako je naznačené na obr. č. 2 a po týchto ťahoch som dostal podiel 1. Aké číslo som si zvolil?

(Raabová)



Obr. 2

Z7-I-1
Minulý týždeň kúpila Snehulienka dva rovnaké balíčky lentiliek. Spravodlivo ich rozdelila medzi svojich 7 trpaslíkov tak, že každému sa z nich ušlo 5. Tie lentilky, čo sa už rozdeliť nedali, zjedla sama. Tento týždeň kúpila Snehulienka 3 balíčky tých istých lentiliek. Znovu ich rozdelila medzi 7 trpaslíkov a zvyšok zjedla. Tentoraz sa jej však ušlo ešte menej ako minulý týždeň. Koľko lentiliek mohlo byť v jednom balíčku?

(Bednářová)

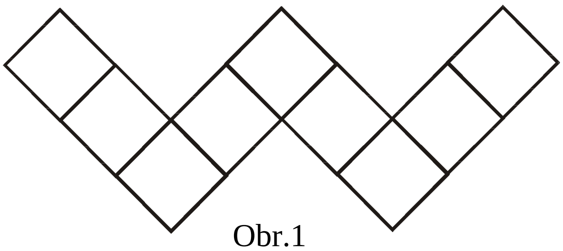
Z7-I-2
Mamička usmažila šišky. Ich vôňa prilákala deti. Paľko si vzal o jednu šišku menej, než bola tretina všetkých šišiek, Svetlana o jednu šišku menej, než bola tretina ostávajúcich a Maruška o jednu šišku menej, než bola tretina zvyšku. V mise ostalo 11 šišiek. Koľko šišiek usmažila mamička?

(Hozová)

Z7-I-3
Mám dva rovnaké papierové trojuholníky. Viem z nich (bez prekrývania) zložiť obdĺžnik s obvodom 21 cm, alebo kosodĺžnik s obvodom 24 cm, alebo aj trojuholník s obvodom 27 cm. Aké rozmery majú moje trojuholníky?

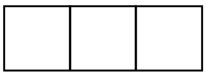
(Bednářová)

Z7-I-4
Do obrazca vpíšte čísla 1, 2, …, 9 tak, aby súčty v každom „trojokienku“ boli rovnaké a čo možno najväčšie.



Obr.1

(Tlustý)

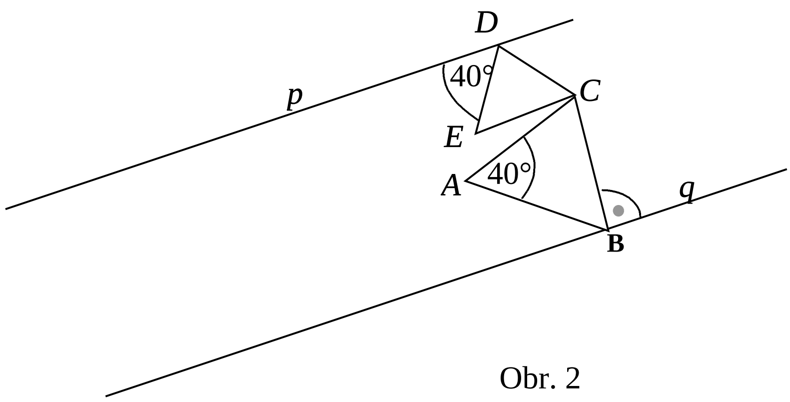


„trojokienko“

Z7-I-5
Neznámy vandal vytrhol z knihy jeden list. Súčet všetkých čísel stránok po vytrhnutí listu je 11011. Koľko mala kniha pôvodne listov a aké boli čísla stránok vytrhnutého listu? (Stránky sú číslované všetky a číslovanie začína číslicou 1.)

(Hozová)

Z7-I-6
Na obrázku č. 2 sú načrtnuté rovnobežné priamky *p, q* a trojuholníky *ABC* a *CDE*, ktoré ležia medzi nimi. Platí:



Obr. 2

- § $D \in p$ a $B \in q$,
- § ΔABC je rovnoramenný,
- § ΔCDE je rovnostranný.

Vypočítaj veľkosť uhla *ECA*.

(Dillingerová)

Z8-I-1
Ocko oprel náš nový rebrík o stenu domu. Spodná (prvá) priečka je 24 cm nad zemou. Posledná – štrnásta priečka je päťkrát tak vysoko, ako tretia priečka. Vzdialenosť medzi každými dvoma priečkami je rovnaká.
a) Ako vysoko nad zemou je tretia priečka?
b) O koľko vyššie sa dostane ocko, ak z tretej priečky vystúpi na piatu?

(Dillingerová)

Z8-I-2
Myslím si 4 dvojciferné čísla. Dve sú prvočísla a dve sú zložené čísla. Súčet prvočísel je 100 a súčet zložených čísel je tiež 100. Aj prvočísla aj zložené čísla sú tvorené tou istou štvoricou rôznych cifier. Ktoré čísla si myslím?

(Ptáčková)

Z8-I-3
V Jurkovej stavebnici je 64 rovnako veľkých kociek. Steny týchto kociek sú jednofarebné – biele alebo čierne. Zo všetkých kociek sa dá zložiť jedna veľká kocka, ktorej každá stena je z polovice biela a z polovice čierna. Koľko najviac celkom bielych kociek môže byť v Jurkovej stavebnici? Načrtnite obrázok, ako by táto veľká kocka vyzerala pri pohľade zdola, zozadu, spredu, zhora, zľava a sprava.

(Bednářová)

Z8-I-4
Sedem trpaslíkov našlo košík jabĺk. Bez toho, aby jabĺčka krájali, podelili sa o ne. Prvý dostal jedno jablko a 1/9 zvyšku. Potom prišiel druhý, vzal si dve jablká a 1/9 zvyšku, tretí tri jablká a 1/9 zvyšku a tak ďalej, až siedmy si vzal 7 jabĺk a 1/9 zvyšku. Jablká, ktoré po tomto delení zostali v košíku, priniesli Snehulienke. Koľko najmenej jabĺk našli trpaslíci? Koľko jabĺk dostal každý z nich a koľko Snehulienka?

(Hozová)

Z8-I-5
Martin má z matematiky rôzne známky, ktorých aritmetický priemer je 2,1. Pätorku nemá ani jednu. Zato jednotky tvoria 35% a dvojky 30% všetkých jeho známok z matematiky. Koľko percent všetkých Martinových známok z matematiky tvoria trojky a koľko štvorky? Koľko má známok z matematiky, ak trojok má 5?

(Dillingerová)

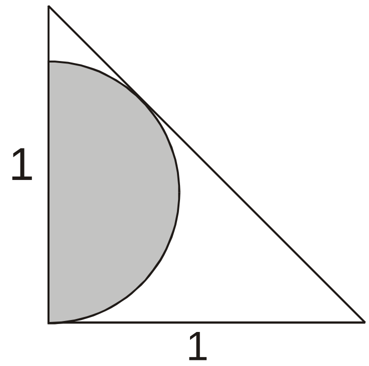
Z8-I-6
Stredná priečka delí lichobežník na dve časti, z ktorých menšia má obsah 18 cm^2. Aký obsah bude mať väčšia z častí, na ktoré delí tento lichobežník jeho uhlopriečka, ak menšia má obsah 16 cm^2?

(Bednářová)

Z9-I-1
V Jurkovej stavebnici je 64 rovnako veľkých kociek. Steny týchto kociek sú jednofarebné – biele alebo čierne. Zo všetkých kociek sa dá zložiť jedna veľká kocka, ktorej každá stena je z polovice biela a z polovice čierna. Koľko najviac celkom bielych kociek môže byť v Jurkovej stavebnici? Načrtnite obrázok, ako by táto veľká kocka vyzerala pri pohľade zdola, zozadu, spredu, zhora, zľava a sprava.

(Bednářová)

Z9-I-2
Určite plochu polkruhu vpísaného pravouhlému rovnoramennému trojuholníku (pozri Obr.). Údaje sú v decimetroch.



(Tlustý)

Z9-I-3
Tromi spôsobmi napíšte číslo 2004 ako súčet niekoľkých po sebe idúcich prirodzených čísel.

(Hozová)

Z9-I-4
Ak v príklade na násobenie dvoch prirodzených čísel zaokrúhlime 1. činiteľa na desiatky, súčin sa zväčší o 48. Ak v pôvodnom príklade zaokrúhlime 2. činiteľa na desiatky, pôvodný súčin sa zmenší o 1512. Nájdite pôvodný príklad (všetky možnosti).

(Dillingerová)

Z9-I-5
Danka, Milka, Jožko a Peťo sa vážili. Najľahší a najťažší z nich vážia dohromady 113 kg. Danka, Milka a Jožko vážia spolu 169 kg. Milka, Jožko a Peťo majú spolu 166 kg a Danka s Peťom 99 kg. Koľko váži každý z nich, keď Jožko nie je najťažší?

(Ptáčková)

Z9-I-6
Nájdite prirodzené čísla a, b, ktoré spĺňajú podmienky:

- $3a+b=165$,
- najmenší spoločný násobok čísel a, b je desaťkrát väčší než najväčší spoločný deliteľ čísel a, b.

(Tlustý)

Na ukážku uvádzame ***vzorové riešenie*** jednej úlohy zo staršej olympiády:

Úloha Z8-II-1.

Daný je obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán. Ak zväčšíme jednu jeho stranu o 4 a druhú zmenšíme o 5, dostaneme obdĺžnik s dvojnásobným obsahom. Určte strany daného obdĺžnika. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. Dĺžky strán obdĺžnika označíme *a*, *b*. Nový obdĺžnik má dĺžky strán $a + 4$, $b - 5$. Podľa podmienky úlohy pre obsahy oboch obdĺžnikov platí:

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupne upravíme: $ab - 4b + 5a = -20$

$$ab - 4b + 5a - 20 = -40$$

(odčítame 20, aby sme mohli ľavú stranu upraviť na súčin)

$$(a-4)(b+5) = -40.$$

Riešenie nájdeme rozkladom čísla -40 na 2 činitele. Pritom musí byť $a > 0$, $b > 0$, a teda $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$.

Sú dve možnosti: $(-2).20 = -40$ a $(-1).40 = -40$.

V prvom prípade dostaneme obdĺžnik o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahom $S = 30$. Nový obdĺžnik má potom strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, t.j. $S' = 2S$.

V druhom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami $a = 3$, $b = 35$ s obsahom $S = 105$. Nový obdĺžnik má potom strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opäť je $S' = 2S$.

Na záver jedna rada:

Úlohy nie sú ľahké. Nenechajte sa odradiť, keď neobjavíte hneď riešenie. Experimentujte, kreslite si, „hrajte sa“ s úlohou. Niekedy pomôže pozrieť sa do nejakej knižky, kde nájdete podobné úlohy vyriešené, inokedy sa môže stať, že zrazu o tri dni „z ničoho-nič“ na riešenie prídete.

Prajeme vám veľa úspechov a radosti pri riešení úloh MO a v škole.

Súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva SR spolu s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Súťaž riadi Slovenská komisia MO, v jednotlivých okresoch okresné komisie MO. Na jednotlivých školách súťaž zaisťujú učitelia matematiky.

Vy sa vždy obracajte na svojho učiteľa matematiky.

52. ročník Matematickej olympiády
Leták pre kategórie Z4 - Z9

Náklad: 2500 výtlačkov
Vydala IUVENTA pre vnútornú potrebu MŠ SR

Zodpovedný redaktor: RNDr. Monika Dillingerová