2017/2018
67. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 8. – 13. 7. 2018.*)

1. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s opísanou kružnicou Γ. Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E, pričom $|AD| = |AE|$. Osi úsečiek BD a CE pretínajú kratšie oblúky AB a AC kružnice Γ postupne v bodoch F a G. Dokážte, že priamky DE a FG sú rovnobežné (alebo totožné). (*Grécko*)

2. Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$, pre ktoré existujú reálne čísla a_1, a_2, …, a_{n+2} také, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, n$. (*Patrik Bak, Slovensko*)

3. Rovnostrannú trojuholníkovú tabuľku čísel nazývame *antipascalov trojuholník*, keď každé číslo okrem čísel v spodnom riadku je rovné absolútnej hodnote rozdielu dvoch čísel nachádzajúcich sa bezprostredne pod ním. Napríklad nasledujúca tabuľka je antipascalovým trojuholníkom so štyrmi riadkami, ktorý obsahuje každé celé číslo od 1 do 10:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Rozhodnite, či existuje antipascalov trojuholník s 2018 riadkami, ktorý obsahuje každé celé číslo od 1 do $1 + 2 + \ldots + 2018$. (*Irán*)

4. Nazývajme *pozíciou* každý bod roviny so súradnicami (x, y) takými, že x aj y sú kladné celé čísla menšie alebo rovné 20. Na začiatku je každá zo 400 pozícií voľná. Anna a Boris sa striedajú v ukladaní kameňov, pričom začína Anna. Anna vo svojom ťahu položí nový červený kameň na voľnú pozíciu vždy tak, aby vzdialenosť medzi každými dvoma pozíciami obsadenými červenými kameňmi bola rôzna od $\sqrt{5}$. Boris vo svojom ťahu položí nový modrý kameň na ľubovoľnú voľnú pozíciu. (Pozícia obsadená modrým kameňom môže mať ľubovoľné vzdialenosti od ostatných obsadených pozícií.) Skončia vtedy, keď niektorý z nich už nemôže položiť ďalší kameň. Nájdite najväčšie K také, že Anna dokáže položiť aspoň K červených kameňov bez ohľadu na to, ako ukladá kamene Boris. (*Arménsko*)

5. Nech $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel. Predpokladajme, že existuje celé číslo $N > 1$ také, že pre každé $n \geqq N$ je číslo

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

celé. Dokážte, že existuje kladné celé číslo M také, že $a_m = a_{m+1}$ pre všetky $m \geqq M$. (*Mongolsko*)

6. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$, pričom $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Vnútri neho leží bod X taký, že

$$|\measuredangle XAB| = |\measuredangle XCD| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle XBC| = |\measuredangle XDA|.$$

Dokážte, že $|\measuredangle BXA| + |\measuredangle DXC| = 180°$. (*Poľsko*)