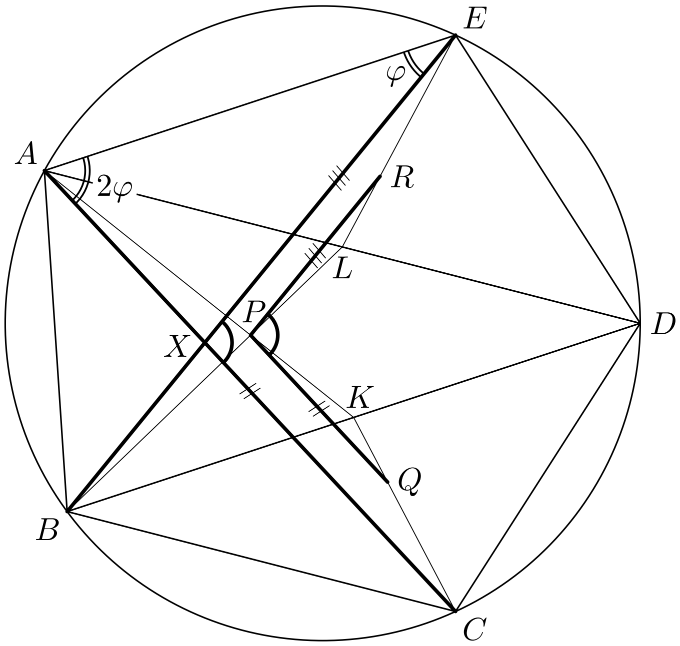
64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

---

1. *Na kružnici s polomerom r ležia rôzne body A, B, C, D, E v tomto poradí, pričom $|AB| = |CD| = |DE| > r$. Dokážte, že trojuholník, ktorého vrcholy sú ťažiská trojuholníkov ABD, BCD a ADE, je tupouhlý.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Označme P, Q, R postupne ťažiská trojuholníkov ABD, BCD, ADE. Nech K a L sú postupne stredy úsečiek BD a AD. Ťažiská P a Q delia ťažnice AK a CK v rovnakom pomere $AP : PK = CQ : QK = 2 : 1$, preto $PQ \parallel AC$. Podobne $PR \parallel BE$. Z toho vyplýva, že uhol QPR má rovnakú veľkosť ako uhol CXE určený priamkami AC a BE (pričom X je priesečník priamok AC a BE, poz. obr. 1).



Obr. 1

Označme φ veľkosť obvodového uhla určeného tetivou AB zadanej kružnice. Keďže $|CD| = |DE| = |AB|$, máme $\measuredangle CAE = 2\varphi$ a teda z trojuholníka AXE dostávame

$$|\measuredangle CXE| = 180° - |\measuredangle AXE| = \varphi + 2\varphi = 3\varphi.$$

Keďže $|AB| > r$, je $\varphi > 30°$, takže $|\measuredangle QPR| = 3\varphi > 90°$.

Poznámka. Body P, Q, R vždy určujú trojuholník, t. j. nemôžu ležať na jednej priamke. Vyplýva to z toho, že uhlopriečky AC a BE tetivového štvoruholníka $ABCE$ vždy určujú uhol s veľkosťou menej ako $180°$.

---

2. *Systém množín $\mathcal{F}$ sa nazýva skvelý, ak je splnená nasledujúca podmienka: Pre každú trojicu množín $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{F}$ je aspoň jedna z množín*

$$(X_1 \setminus X_2) \cap X_3, \qquad (X_2 \setminus X_1) \cap X_3$$

prázdna. Dokážte, že ak $\mathcal{F}$ je skvelý systém pozostávajúci z niektorých podmnožín danej konečnej množiny U, tak $|\mathcal{F}| \leqq |U| + 1$. (*Michał Pilipczuk*)

Riešenie. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na $|U|$. Ak $|U| = 0$, t. j. ak $U = \emptyset$, existuje iba jedna podmnožina množiny U a triviálne $|\mathcal{F}| \leqq 1$.

Ďalej predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky množiny s počtom prvkov menším ako k pre dané $k > 0$. Nech U je ľubovoľná množina spĺňajúca $|U| = k$ a $\mathcal{F}$ je skvelý systém jej podmnožín. Ukážeme, že $|\mathcal{F}| \leqq |U| + 1$.

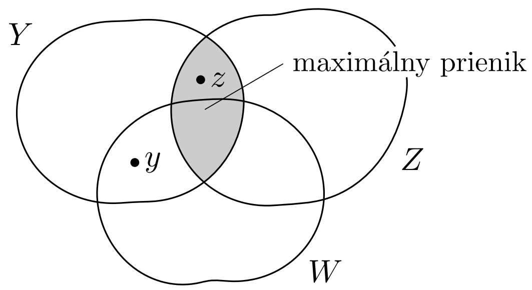
Ak $|\mathcal{F}| \leqq 1$, tvrdenie očividne platí. Ak $|\mathcal{F}| \geqq 2$, uvažujme všetky dvojice rôznych množín z $\mathcal{F}$. Keďže počet takých dvojíc je konečný a nenulový, existuje dvojica $(Y, Z) \in \mathcal{F}^2$, $Y \neq Z$ s prienikom majúcim maximálny počet prvkov, teda $|Y \cap Z| = m$ a prienik ľubovoľných dvoch rôznych množín z $\mathcal{F}$ má najviac m prvkov.

Keďže množiny Y a Z sú rôzne, aspoň jedna z nich musí obsahovať prvok, ktorý neleží v druhej z nich. Bez ujmy na všeobecnosti nech $Y \setminus Z$ je neprázdna a zvoľme nejaký prvok $y \in Y \setminus Z$.

V prípade, že Y je jediná množina obsahujúca y, sú všetky množiny systému $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{Y\}$ podmnožinami množiny $U' = U \setminus \{y\}$. Zrejme $\mathcal{F}'$, keďže je podsystémom skvelého systému, je tiež skvelý. Podľa indukčného predpokladu pre U' a $\mathcal{F}'$ máme

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'| + 1 \leqq (|U'| + 1) + 1 = |U| + 1,$$

tvrdenie teda platí.



Obr. 2

V opačnom prípade existuje aspoň jedna množina $W \in \mathcal{F}$ taká, že $y \in W$, $W \neq Y$ (obr. 2). Vzhľadom na výber dvojice (Y, Z) množina W nemôže obsahovať celý prienik $Y \cap Z$ (inak by bolo $|Y \cap W| \geqq m + 1$). Nech $z \in (Y \cap Z) \setminus W$. Dostávame

$$y \in (W \setminus Z) \cap Y \qquad \text{a} \qquad z \in (Z \setminus W) \cap Y,$$

čo je v spore s vlastnosťami skvelého systému pre $X_1 = Z$, $X_2 = W$ a $X_3 = Y$. Tento prípad preto nie je možný a indukčný krok je ukončený.

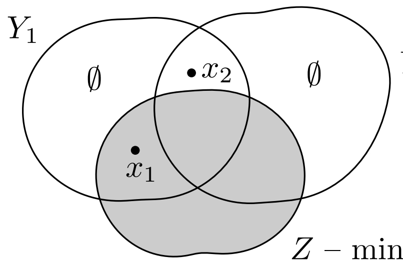
Poznámka. V skutočnosti sme dokázali, že pre každý skvelý systém s aspoň jednou množinou existuje prvok, ktorý patrí len do jednej množiny.

Iné riešenie. Opäť budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na $|U|$, s triviálnou platnosťou tvrdenia pre $U = \emptyset$. Predpokladajme, že $\mathcal{F}$ je skvelý systém podmnožín konečnej množiny U a nech Z je spomedzi všetkých neprázdnych množín z $\mathcal{F}$ tá s najmenším počtom prvkov (ak taká neexistuje, tak $|\mathcal{F}| \leqq 1$ a tvrdenie platí).

Prvým pozorovaním je, že ak Y_1 a Y_2 sú dve neprázdne množiny z $\mathcal{F}$, pre ktoré platí $Y_1 \setminus Z = Y_2 \setminus Z$ (pripúšťame aj prípad $Y_1 = Z$ alebo $Y_2 = Z$), tak $Y_1 = Y_2$. Predpokladajme, že to nie je pravda. Potom existujú také dve neprázdne množiny $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$, pričom $Y_1 \neq Y_2$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $x_1 \in Y_1 \setminus Y_2$. Keďže $Y_1 \setminus \setminus Y_2 \subseteq Z$, máme $x_1 \in Z \setminus Y_2$ (obr. 3). Množina Z má minimálny počet prvkov a Y_2 je neprázdna, preto $|Z| \leqq |Y_2|$. Z toho, že $Z \nsubseteq Y_2$ (lebo $x_1 \in Z \setminus Y_2$), dostávame, že aj $Y_2 \setminus Z$ je neprázdna a teda existuje prvok $x_2 \in Y_2 \setminus Z = Y_1 \setminus Z$. Platí tak

$$x_1 \in Z \setminus Y_2, \qquad x_2 \in Y_2 \setminus Z \qquad \text{a} \qquad \{x1, x2\} \subseteq Y_1.$$

To je v spore s definíciou skvelého systému pre $X_1 = Z$, $X_2 = Y_2$ a $X_3 = Y_1$.



Obr. 3

Definujme systém $\mathcal{F}'$ podmnožín množiny $U \setminus Z$ nasledovne:

$$\mathcal{F}' = \{Y \setminus Z\colon\ Y \in \mathcal{F},\ Y \neq \emptyset\}.$$

Zrejme $\mathcal{F}'$ je skvelý systém podmnožín množiny s menším počtom prvkov, takže podľa indukčného predpokladu $|\mathcal{F}'| \leqq |U \setminus Z| + 1$. Navyše z vyššie uvedeného pozorovania vyplýva, že množiny $Y \setminus Z$ sú navzájom rôzne pre všetky $Y \in \mathcal{F}$ spĺňajúce $Y \neq \emptyset$, takže $|\mathcal{F}| \leqq |\mathcal{F}'| + 1$ (sčítanec $+1$ je tu kvôli tomu, že v $\mathcal{F}$ môže byť prázdna množina). Napokon dostávame

$$|\mathcal{F}| \leqq |\mathcal{F}'| + 1 \leqq |U \setminus Z| + 1 + 1 \leqq |U| - 1 + 1 + 1 = |U| + 1.$$

---

3. *Reálne čísla x, y, z spĺňajú rovnicu*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z = 0$$

a žiadne z nich neleží v otvorenom intervale $(-1, 1)$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčtu $x + y + z$. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Pri prechode od trojice (x, y, z) k trojici $(-x, -y, -z)$ zostane zadaná rovnica splnená a hodnota $x + y + z$ sa zmení na opačné číslo. Keďže na poradí čísel x, y, z nezáleží a všetky nemôžu mať kvôli rovnici rovnaké znamienko, predpokladajme všade ďalej, že platí $x > 0 \land y > 0 \land z < 0$, a hľadajme najväčšiu hodnotu výrazu $V = |x + + y + z|$ (tá bude hľadané maximum).

Zadanú rovnicu prepíšeme na tvar

$$f(x)+f(y)=f(t), \quad \text{pričom} \quad t:=-z>0 \quad \text{a} \quad f(x)=x+\frac{1}{x},$$

pričom kvôli „zakázanému“ intervalu a nášmu znamienkovému predpokladu platí $x, y, t \in I := \langle 1, \infty)$. Ďalej budeme využívať známy poznatok, že funkcia f je rastúca bijekcia $I \to \langle 2, \infty)$ (triviálny dôkaz tu vynecháme). Z nerovnosti

$$f(t)=f(x)+f(y)=x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}>x+y+\frac{1}{x+y}=f(x+y)$$

preto vyplýva $t > x+y$, a teda $x+y+z = x+y-t < 0$. Preto hľadáme maximum kladného výrazu $V = |x+y+z| = t-x-y$.

Každú trojicu (x, y, t) čísel z I nazveme *vyhovujúcou*, ak $f(x)+f(y)=f(t)$. Príkladom je trojica $(1,1,t_0)$, v ktorej $t_0 > 1$ je číslo s vlastnosťou $f(t_0)=4$, teda $t_0 = 2+\sqrt{3}$. Tejto trojici zodpovedá $V=\sqrt{3}$; ukážeme, že je to hľadané maximum. Postup založíme na takomto tvrdení: *ak sú (x, y, t) a (x, y', t') ľubovoľné dve vyhovujúce trojice s rovnakou zložkou x a ak platí $y' < y$, potom platí $t-x-y < t'-x-y'$.* Ak dokážeme tento záver, potom vzhľadom na symetriu bude obdobné platiť aj pre každé dve trojice (x, y, t) a (x', y, t') s rovnakou zložkou y; keď potom k ľubovoľnej vyhovujúcej trojici (x, y, t) uvážime postupne vyhovujúce trojice $(x, 1, t')$ a $(1, 1, t_0)$, použitím sformulovaného tvrdenia dostaneme želaný záver $\max V = \sqrt{3}$. (Navyše tak zistíme, že rovnosť $V=\sqrt{3}$ nastane pre jedinú vyhovujúcu trojicu $(1,1,2+\sqrt{3})$.)

Pre dôkaz tvrdenia si všimneme, že z rovností

$$f(t)=f(x)+f(y) \quad \text{a} \quad f(t')=f(x)+f(y')$$

a nerovnosti $f(y') < f(y)$, ktorá je dôsledkom zadaného predpokladu $y' < y$, vyplývajú nerovnosti $f(x) < f(t') < f(t)$, odkiaľ $1 < t' < t$. Platí teda $1 < t'y' < ty$, a tak z rovností

$$f(x)=f(t)-f(y)=(t-y)\left(1-\frac{1}{ty}\right)=f(t')-f(y')=(t'-y')\left(1-\frac{1}{t'y'}\right)$$

vďaka odhadu činiteľov vo veľkých zátvorkách

$$0<1-\frac{1}{t'y'}<1-\frac{1}{ty}$$

vyplýva pre prislúchajúce činitele v malých zátvorkách odhad $t-y < t'-y'$, a teda aj nerovnosť $t-x-y < t'-x-y'$, ktorú sme mali dokázať. Tým je riešenie úlohy ukončené.

Odpoveď. Najväčšia hľadaná hodnota súčtu $x+y+z$ je rovná $\sqrt{3}$.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení sa budeme zaoberať len prípadom $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $z \leqq -1$ a hľadať maximum výrazu $V = |x+y+z|$. Zo zadanej rovnosti môžeme vyjadriť z ako koreň kvadratickej rovnice

$$z^2+\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)z+1=0.$$

Keďže súčin koreňov tejto rovnice je 1, hodnota z ležiaca mimo intervalu $(-1, 1)$ je vzhľadom na podmienky $x \geqq 1$, $y \geqq 1$ určená vzťahom

$$z = \frac{1}{2}\left(-\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4}\right).$$

Ostáva teda nájsť maximum výrazu

$$2V = 2|-x-y-z| = \left|\sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4} - \left(x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y}\right)\right|.$$

Ľahko možno nahliadnuť, že výraz vnútri absolútnej hodnoty je kladný. Stačí už len ukázať, že

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4} - \left(x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y}\right) \leqq 2\sqrt{3}.$$

Ekvivalentnými úpravami dostávame

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 - 4} \leqq 2\sqrt{3} + \left(x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y}\right),$$

$$\vdots$$

$$x^2 + y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{3}y \leqq 2xy + \sqrt{3}x^2y + \sqrt{3}xy^2.$$

Posledná nerovnosť platí, pretože je súčtom nerovností

$$x^2 \leqq x^2y, \quad y^2 \leqq xy^2, \quad \sqrt{3}x \leqq (\sqrt{3}-1)x^2y + xy \quad \text{a} \quad \sqrt{3}y \leqq (\sqrt{3}-1)xy^2 + xy,$$

ktoré sú triviálne splnené pre $x, y \geqq 1$.

---

4. *Podivná kalkulačka má len dve tlačidlá, na každom je napísané dvojciferné prirodzené číslo. Na začiatku je na displeji číslo* 1. *Vždy, keď stlačíme tlačidlo s číslom N, kalkulačka zmení zobrazené číslo X na číslo $X \cdot N$ alebo $X + N$. Pritom násobenie a sčítanie sa strieda, začína sa násobením. (Napríklad ak na 1. tlačidle je číslo* 10 *a na 2. tlačidle je číslo* 20 *a stlačíme postupne 1., 2., 1. a 1. tlačidlo, dostaneme postupne výsledky* $1 \cdot 10 = 10$, $10 + 20 = 30$, $30 \cdot 10 = 300$, $300 + 10 = 310$.*) Rozhodnite, či existujú konkrétne hodnoty dvojciferných čísel na tlačidlách také, že dokážeme zobraziť nekonečne veľa čísel končiacich štvorčíslím*

a) 2015,

b) 5813. (Michal Rolínek, Peter Novotný)

Riešenie. Nech a, b sú čísla napísané na tlačidlách. Uvažujme postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ takú, že číslo x_{n+1} je tvorené posledným štvorčíslím čísla $a(x_n + b)$ pre všetky $n \geqq 0$. Inými slovami,

$$x_{n+1} \equiv a(x_n + b) \pmod{10\,000} \qquad \text{a} \qquad 0 \leqq x_{n+1} < 10\,000.$$

Keďže existuje len konečne veľa rôznych hodnôt x_n a každý člen je závislý len od predošlého člena, postupnosť musí byť periodická s periódou začínajúcou členom, ktorého hodnota sa prvýkrát zopakuje.

Vo všeobecnosti perióda nemusí začínať členom x_0 (napr. ak zoberieme $x_0 = 1$, $a = 10$ a $b = 10$, tak všetky členy okrem x_0 končia nulou, takže hodnota x_0 sa už nikdy nezopakuje). Avšak uvažujme špeciálny prípad, keď číslo a je nesúdeliteľné s 10 000. Tvrdíme, že v takom prípade perióda začína členom x_0. Predpokladajme, že x_n je prvý člen postupnosti, ktorého hodnota sa v nej zopakuje. Nech $x_m = x_n$, $m > n$. Ak $n > 0$, túto rovnosť možno prepísať v tvare $a(x_{n-1} + b) \equiv a(x_{m-1} + b) \pmod{10\,000}$, čiže

$$10\,000 \mid a(x_{n-1} + b) - a(x_{m-1} + b) = a(x_{n-1} - x_{m-1}).$$

Keďže a je nesúdeliteľné s 10 000, máme $10\,000 \mid x_{n-1} - x_{m-1}$, odkiaľ $x_{n-1} = x_{m-1}$. To je však v spore s predpokladom, že x_n bol prvý člen, ktorého hodnota sa zopakovala.

Predošlý odsek ponúka návod, ako zobraziť želané číslo nekonečne veľa krát: Potrebujeme len vytvoriť číslo jedenkrát s použitím tlačidiel takých, že a je nesúdeliteľné s 10 000 a potom opakovať operácie $+b$, $\cdot a$, $+b$, $\cdot a$, $\ldots$ donekonečna. V prípade, že dostaneme želané číslo po párnom počte stlačení tlačidiel, t. j. končiac pričítaním, želaný efekt dostaneme opakovaním operácií $\cdot a$, $+b$, $\cdot a$, $+b$, $\ldots$

Je mnoho spôsobov ako zobraziť 2 015 použitím zopár stlačení. Napr. sa môžeme pokúsiť nájsť a, b také, že $(1 \cdot a + b) \cdot a = 2\,015$. Keďže $2\,015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, môžeme zobrať $a = 31$ a $b = 5 \cdot 13 - a = 65 - 31 = 34$. Dostaneme

$$1 \xrightarrow{\cdot\, 31} 31 \xrightarrow{+\, 34} 65 \xrightarrow{\cdot\, 31} 2\,015.$$

Všimnime si, že 31 je nesúdeliteľné s 10 000. Časť a) je tým vyriešená.

Podobne v časti b) chceme vygenerovať postupnosť (x_n) opísanú vyššie s prvým členom $x_0 = 5\,813$. Avšak nie je jednoduché dostať prvý výskyt čísla 5 813 použitím malého počtu stlačení. Preto sa budeme snažiť vytvoriť číslo $5\,813 + b$, uvedomujúc si, že následným vykonaním operácií $\cdot a$, $+b$, $\cdot a$, $\ldots$ napokon dosiahneme aj 5 813. Jednou z možností je nájsť a, b podľa schémy

$$1 \xrightarrow{\cdot\, b} b \xrightarrow{+\, b} 2b \xrightarrow{\cdot\, a} 2ab \xrightarrow{+\, a} 2ab + a = 5\,813 + b.$$

Ostatnú rovnicu možno prepísať na tvar $(2a - 1)(2b + 1) = 11\,625 = 3 \cdot 5^3 \cdot 31$. Odtiaľ možno poľahky získať niekoľko dvojciferných riešení, jedným z nich je $a = 47$, $b = 62$. Keďže 47 je nesúdeliteľné s 10 000, postupnosť stlačení

$$1 \xrightarrow{\cdot\, 62} 62 \xrightarrow{+\, 62} 124 \xrightarrow{\cdot\, 47} 5\,828 \xrightarrow{+\, 47} 5\,875 \xrightarrow{\cdot\, 47} \_ \xrightarrow{+\, 62} \_ \xrightarrow{\cdot\, 47} \_ \xrightarrow{+\, 62} \ldots$$

vygeneruje čísla končiace štvorčíslím $5\,875 - 62 = 5\,813$ nekonečne veľa krát.

Poznámka. Číslo 5 813 je jediné štvorciferné číslo, na vytvorenie ktorého potrebujeme aspoň 7 stlačení pri podmienke, že aspoň jedno z čísel na tlačidlách je nesúdeliteľné s 10 000. Preto snažiť sa ho vytvoriť priamo z čísla 1 môže byť zdĺhavé. Na druhej strane, je mnoho spôsobov ako ho vytvoriť v podobnom duchu ako je ukázané vyššie. Uvádzame náznak iného postupu:

$$1 \xrightarrow{\cdot\, 89} 89 \xrightarrow{+\, 89} 178 \xrightarrow{\cdot\, 89} 15\,842 \xrightarrow{+\, 60} 15\,902 = 15\,813 + 89 \xrightarrow{\cdot 89 + 89} \_ \xrightarrow{\cdot 89 + 89} \ldots$$

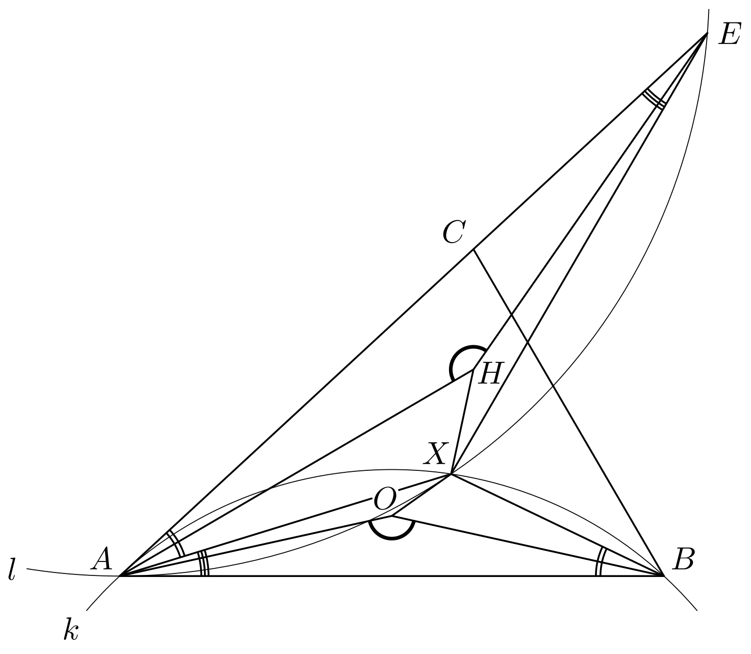
Iné riešenie. Dá sa zostrojiť postupnosť, v ktorej sa *každé* štvorciferné číslo vyskytuje nekonečne veľa krát. Uvažujme kalkulačku s $a = 11$ a $b = 12$. Použitím rovnakých úvah ako v predošlom riešení dospejeme k tomu, že ak budeme neustále stláčať prvé tlačidlo (s číslom 11, ktoré je nesúdeliteľné s 10 000), po konečnom párnom počte stlačení dostaneme číslo končiace štvorčíslím 0001. Ak zmeníme tlačidlo v poslednej operácii, teda nahradíme $+11$ operáciou $+12$, dostaneme číslo končiace 0002. Rovnakým postupom dokážeme vždy zväčšiť číslo tvorené poslednými štyrmi ciframi o 1 (alebo zmeniť 9999 na 0000). Tým je úloha vyriešená.

---

5. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, ktorý nie je rovnostranný. Označme O stred jeho opísanej kružnice a H jeho priesečník výšok. Kružnica k prechádza bodom B a dotýka sa priamky AC v bode A. Kružnica l má stred na polpriamke BH a dotýka sa priamky AB v bode A. Kružnice k a l sa pretínajú v bode X ($X \neq A$). Dokážte, že $|\angle HXO| = 180° - |\angle BAC|$.* (*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Nech E je priesečník kružnice l a priamky AC ($E \neq A$). Keďže k leží v polrovine ACB a l leží v polrovine ABC, bod X leží vnútri uhla BAC (obr. 4). Z úsekových uhlov máme $|\angle XAE| = |\angle XBA|$ a $|\angle XAB| = |\angle XEA|$. Trojuholníky ABX a EAX sú preto podobné.

Označme γ veľkosť uhla ACB. Zo stredového uhla máme $|\angle AOB| = 2\gamma$. Priamka BH prechádza stredom kružnice l a je kolmá na jej tetivu AE, takže je jej osou. Preto $|AH| = |HE|$ a z rovnoramenného trojuholníka EAH a z $AH \perp BC$ dostávame $|\angle EAH| = 90° - \gamma$, preto $|\angle AHE| = 2\gamma$.



Obr. 4

Trojuholníky ABO a EAH sú oba rovnoramenné a oproti základni majú rovnaké uhly, preto sú podobné. Máme dve dvojice podobných trojuholníkov s rovnakým koeficientom podobnosti $|AB| : |EA|$. Keďže O a X ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou AB a H a X ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou EA, štvoruholníky[1] $ABXO$ a $EAXH$ sú podobné.

Uvažujme otočenie so stredom X, ktoré zobrazí polpriamku XB na polpriamku XA. Vzhľadom na odvodenú podobnosť sa polpriamka XO v tomto otočení zobrazí na polpriamku XH. Odtiaľ

$$|\angle HXO| = |\angle AXB| = 180^\circ - |\angle BAC|.$$

Ostatná rovnosť vyplýva z toho, že AXB je obvodový uhol nad tetivou AB kružnice k, zatiaľ čo CAB je úsekový uhol prislúchajúci tej istej tetive. Pritom X aj C ležia v rovnakej polrovine určenej touto tetivou.

Poznámka. Namiesto otočenia možno uvažovať špirálovú podobnosť zobrazujúcu $ABXO$ na $EAXH$. Keďže zobrazuje BA na AC, je zrejmé, že otočenie, ktorého zložením (s nejakou rovnoľahlosťou) toto zobrazenie vzniká, je o uhol $180^\circ - \angle BAC$.

Iné riešenie. (*Náznak.*) Úloha sa dá vyriešiť prostriedkami analytickej geometrie. Nech A je počiatok karteziánskej súradnicovej sústavy a B leží na x-ovej osi. Označme b prvú súradnicu bodu B a nech (c, v) sú súradnice bodu C. Rutinným výpočtom dostaneme

$$A = (0,0),\ B = (b,0),\ C = (c,v),\ H = \left(c, \frac{c(b-c)}{v}\right),\ O = \left(\tfrac{1}{2}b, \frac{c^2+v^2-bc}{2v}\right),$$
$$S_k = \left(\tfrac{1}{2}b, -\frac{bc}{2v}\right),\ S_l = \left(0, \frac{bc}{v}\right),\ X = \left(\frac{6bc^2}{9c^2+v^2}, \frac{2bcv}{9c^2+v^2}\right),\ Y = \left(\tfrac{1}{2}b, \frac{bc}{2v}\right).$$

Pritom S_k a S_l sú postupne stredy kružníc k a l a Y je priesečník priamok BH a OS_k (tieto dve priamky sú postupne kolmé na AC a AB, preto určujú uhol, ktorý má rovnakú veľkosť ako uhol BAC).

Namiesto vyjadrovania veľkosti uhla HXO ukážeme, že body X, O, H a Y ležia na jednej kružnici, teda že determinant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{(6bc^2)^2 + (2bcv)^2}{(9c^2+v^2)^2} & \dfrac{6bc^2}{9c^2+v^2} & \dfrac{2bcv}{9c^2+v^2} & 1 \\ \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{(c^2+v^2-bc)^2}{4v^2} & \dfrac{b}{2} & \dfrac{c^2+v^2-bc}{2v} & 1 \\ c^2 + \dfrac{c^2(b-c)^2}{v^2} & c & \dfrac{c(b-c)}{v} & 1 \\ \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{b^2c^2}{4v^2} & \dfrac{b}{2} & \dfrac{bc}{2v} & 1 \end{vmatrix}$$

je nulový. To je jednoduché cvičenie, pokiaľ ovládame základné triky z lineárnej algebry (pričítanie násobku jedného riadka k druhému nezmení determinant; to isté platí pre stĺpce; keď overujeme len nulovosť determinantu, môžeme vynásobiť riadok či stĺpec nenulovou konštantou).

Ostáva ukázať, že spomedzi dvoch možných veľkostí $|\angle BAC|$ a $180^\circ - |\angle BAC|$, ktoré môže mať obvodový uhol nad tetivou HO kružnice opísanej trojuholníku HOY, má uhol HXO vždy tú druhú. Osobitne tiež treba preveriť prípady $Y = O$ či $Y = H$. Na zdôvodnenie toho, že nemôžeme „preskočiť“ z jednej hodnoty na druhú, sa dajú použiť úvahy o spojitosti.

[1] Pripúšťame možnosť, že tieto štvoruholníky sú degenerované – tri zo štyroch vrcholov môžu ležať na jednej priamke.

6. *Nech n je dané párne prirodzené číslo. Na tabuli je napísaných n reálnych čísel. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve čísla, zotrieme ich a každé z nich nahradíme ich súčinom. Dokážte, že bez ohľadu na to, s akou n-ticou začneme, je možné dostať po konečnom počte krokov na tabuli n rovnakých čísel.* (Peter Novotný)

Riešenie. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na n. Pre $n = 2$ je to triviálne (želanú dvojicu dostaneme po jednom kroku $(a, b) \to (ab, ab)$), podobne pre $n = 4$ (použijeme schému $(\underline{a}, \underline{b}, c, d) \to (ab, ab, \underline{c}, \underline{d}) \to (\underline{ab}, ab, \underline{cd}, cd) \to$ $\to (abcd, \underline{ab}, abcd, \underline{cd}) \to (abcd, abcd, abcd, abcd)$).

Tvrdenie ešte osobitne dokážeme pre $n = 6$. Začneme so šesticou tvaru (a, a, a, a, b, b) – tú vieme obdržať vďaka platnosti tvrdenia pre $n = 2$ a $n = 4$ (vykonáme operácie nezávisle na ľavej štvorici a na pravej dvojici). Pre získanie všetkých šiestich čísel rovnakých použijeme nasledovné kroky:

$$(a, a, a, \underline{a}, \underline{b}, b) \to (a, a, \underline{a}, \underline{ab}, ab, b) \to (a, a, a^2b, \underline{a^2b}, \underline{ab}, b) \to (a, a, \underline{a^2b}, a^3b^2, a^3b^2, \underline{b}) \to$$
$$\to (\underline{a}, \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{a^2b^2}}, a^3b^2, a^3b^2, \underline{a^2b^2}) \to (a^3b^2, a^3b^2, a^3b^2, a^3b^2, a^3b^2, a^3b^2)$$

Ďalej predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky párne čísla $n < 4k + 4$ (pričom $k \geqq 1$). Stačí dokázať, že potom platí aj pre $n = 4k + 4$ a $n = 4k + 6$. Postup pre $n = 4k + 4$ je zrejmý: najskôr na základe indukčného predpokladu spravíme rovnakými prvých $2k + 2$ čísel a potom posledných $2k + 2$ čísel. Dostaneme n-ticu tvaru

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{2k+2}, \underbrace{b, \ldots, b}_{2k+2})$$

a následne vykonáme $2k + 2$ krokov pre obdržanie $(ab, \ldots, ab)$ (zakaždým zvolíme jedno a a jedno b).

Pri $n = 4k + 6$ najskôr použijeme indukčný predpoklad pre $n = 2k + 2$ a $n = 2k + 4$, čím dostaneme

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{2k+2}, \underbrace{b, \ldots, b}_{2k+4}).$$

Potom spravíme $2k$ krokov, pričom vždy zvolíme jedno a a jedno b; dostaneme tak

$$(a, a, \underbrace{ab, \ldots, ab}_{4k}, b, b, b, b).$$

V dvoch krokoch zvolíme a s ab, čím obdržíme

$$(a^2b, a^2b, a^2b, a^2b, \underbrace{ab, \ldots, ab}_{4k-2}, b, b, b, b).$$

Po štyroch krokoch, v ktorých zoberieme vždy b a a^2b, získame

$$(a^2b^2, a^2b^2, a^2b^2, a^2b^2, \underbrace{ab, \ldots, ab}_{4k-2}, a^2b^2, a^2b^2, a^2b^2, a^2b^2).$$

Napokon vykonáme $2k-1$ krokov, ktorými vždy dve hodnoty ab nahradíme dvoma hodnotami a^2b^2, čím dostaneme $(a^2b^2, \ldots, a^2b^2)$.

Iné riešenie. (Podľa *Eduarda Batmendijna.*) Opäť budeme postupovať matematickou indukciou. Pre $n=2$ je tvrdenie triviálne. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n=k$ a zoberme $n=k+2$. S použitím indukčného predpokladu najskôr skonštruujeme n-ticu

$$(\underbrace{a, \ldots, a}_{k}, b, b).$$

Pre každé $i = 3, 4, \ldots, k$ spravíme postupne operáciu s číslami na pozíciách i a $k+1$. Týchto $k-2$ krokov zmení n-ticu na

$$(a, a, ab, a^2b, \ldots, a^{k-2}b, a^{k-2}b, b).$$

Po zvolení posledných dvoch čísel dostaneme

$$(a, a, ab, a^2b, \ldots, a^{k-2}b, a^{k-2}b^2, a^{k-2}b^2).$$

Teraz pre každé $i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n$ skombinujeme čísla na pozíciách i a $n+1-i$, čím získame želanú n-ticu

$$(a^{k-1}b^2, a^{k-1}b^2, \ldots, a^{k-1}b^2).$$

Poznámka. Pre nepárne $n \geqq 3$ tvrdenie neplatí. Uvažujme n-ticu $(3, 3, \ldots, 3, 2)$. Nech m je počet výskytov maximálneho prvku v n-tici. Na začiatku je $m = n-1$. Po každom kroku bude hodnota m párna, preto nikdy nemôžeme dosiahnuť stav, keď sú všetky prvky rovné maximu.