MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pre žiakov základných škôl
a nižších ročníkov osemročných gymnázií

52. ročník, školský rok 2002/2003

Milí žiaci,

máte radi zaujímavé matematické úlohy a chceli by ste si zasúťažiť v ich riešení? Ak áno, zúčastnite sa Matematickej olympiády (MO). Súťaž je dobrovoľná a nesúvisí s klasifikáciou z matematiky. Matematická olympiáda má niekoľko kategórií. V tomto letáku nájdete úlohy, ktoré sú určené žiakom základných škôl (ZŠ) a prvých štyroch ročníkov osemročných gymnázií (OG).

Kategória **Z9**
je určená pre žiakov 9. ročníka ZŠ a 4. ročníka OG.

Kategória **Z8**
je určená len pre žiakov 8. ročníka ZŠ .

Kategória **Z7**
je určená pre žiakov 7. ročníka ZŠ a 3. ročníka OG.

Kategória **Z6**
je určená pre žiakov 6. ročníka ZŠ a 2. ročníka OG.

Kategória **Z5**
je určená pre žiakov 5. ročníka ZŠ a 1. ročníka OG.

Kategória **Z4**
je určená pre žiakov 4. ročníka ZŠ.

So súhlasom svojho učiteľa matematiky môžete súťažiť i v *niektorej* kategórii určenej pre vyšší ročník (aj v kategórii Z8), alebo v kategóriách **A**, **B**, **C** a **P**, ktoré sú určené pre žiakov stredných škôl (úlohy sú uverejnené v letákoch MO pre stredné školy).

Priebeh súťaže

Kategória Z4 pozostáva z domáceho a školského kola, kategórie Z5, Z6, Z7, Z8 z domáceho a okresného kola, kategória Z9 z domáceho, okresného a krajského kola.

V rámci domáceho kola riešite 6 úloh, ktoré sú v tomto letáku. **Riešenia úloh odovzdajte svojim učiteľom matematiky najneskôr v týchto termínoch:**

kategória	jedna trojica úloh	druhá trojica úloh
Z4, Z5, Z9	4. november 2002	16. december 2002
Z6, Z7, Z8	2. december 2002	27. február 2003

Vaši učitelia vám riešenia opravia a ohodnotia podľa stupnice: 1 - *výborne*, 2 - *dobre*, 3 - *nevyhovuje*.

Úspešným riešiteľom domáceho kola sa stáva žiak, ktorý bude mať ohodnotené aspoň 4 úlohy stupňom aspoň *dobre*. Práce všetkých úspešných riešiteľov kategórií Z5 - Z9 zašle vaša škola okresnej komisii MO. Ten z nich vyberie najlepších riešiteľov a pozve ich do okresného kola. V rámci neho riešite úlohy podobného rázu ako v domácom kole, avšak klauzúrne, to znamená, že na riešenie máte k dispozícii obmedzený čas, (v kategórii Z5, Z6, Z7, Z8 - 2 hodiny, v kategórii Z9 - 4 hodiny) a nemôžete využívať cudziu pomoc. V kategórii Z4 sa úspešní riešitelia domáceho kola zúčastnia školského klauzúrneho kola. Najlepší riešitelia okresného kola kategórie Z9 budú pozvaní do krajského kola.

Termíny:

kategória	**II. kolo**	**III. kolo**
Z4	*29. január 2003*	-------
Z5	*29. január 2003*	-------
Z6-Z8	*9. apríl 2003*	-------
Z9	*29. január 2003*	*19. marec 2003*

Pokyny a rady súťažiacim

Riešenie súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Jozef Plachý, 7.C ZŠ Hodžova ul. 5, 949 01 Nitra Úloha Z7-I-2

Riešenie píšte tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup, podrobne vysvetlite, ako ste uvažovali. Uvedomte si, že sa hodnotí nielen výsledok, ku ktorému ste došli, ale hlavne správnosť úvah, ktoré k nemu viedli. Práce, ktoré nebudú spĺňať tieto podmienky, alebo budú odovzdané po termíne, nebudú do súťaže prijaté.

Kategória Z4

Z4-I-1

Na konskej farme Kopýtko majú len biele, hnedé a čierne kone. Spolu ich je 27. Pritom hnedých je viac ako polovica a bielych je dvakrát toľko, ako čiernych. Koľko môže byť na farme bielych, koľko čiernych a koľko hnedých koní? Nájdi všetky možnosti.

(*Bálintová*)

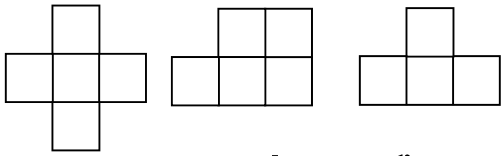
Z4-I-2

Vladko si rozdeľoval lentilky z krabičky na 5 kôpok. Keď už mal na každej rovnako veľa, ostali mu 2 lentilky v krabičke, tak ich zjedol. Potom chcel lentilky prerozdeliť na 4 kôpky. Opäť mu dve ostali a on ich zjedol. Naposledy ešte prerozdelil lentilky na tri kôpky a jednu zvyšujúcu zjedol. Koľko najmenej lentiliek mohol mať Vladko pred prvým delením? Koľko mu ich zostalo po poslednom delení?

(*Dillingerová*)

Z4-I-3

Miško postavil z drevených kociek na stole stavbu a zakreslil, ako jeho stavba vyzerá zhora, spredu a zľava (Obr. 1). Jeho brat Ivko stavbu doplnil rovnakými kockami na najmenší možný kváder. Koľko drevených kociek mal kváder? Koľko kociek dopĺňal Ivko?



zhora spredu zľava

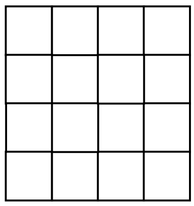
Obr. 1

(*Dillingerová*)

Z4-I-4

Do každého riadku tabuľky na obrázku č. 2 dopíš čísla 6, 7, 8 a 9 (do riadku každé raz) tak, aby súčet čísel napísaných v každom riadku, stĺpci aj na uhlopriečke sa dal deliť tromi bezo zvyšku. Nájdi aspoň dve riešenia.

(*Dillingerová*)



Obr. 2

Z4-I-5

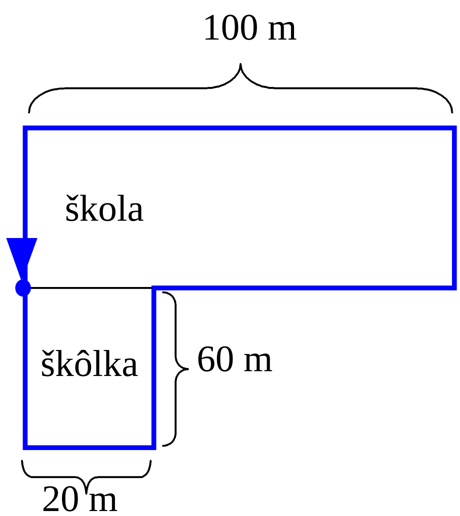
V Rokforte sa platí knutmi a siklami (1 sikel = 24 knutov). Knutové mince existujú s tromi rôznymi hodnotami. Vymyslené sú tak, že na zaplatenie každej ceny od 1 knuta po 1 sikel stačia najviac 4 mince. Zisti, aké hodnoty majú knutové mince v Rokforte.

(*Dillingerová*)

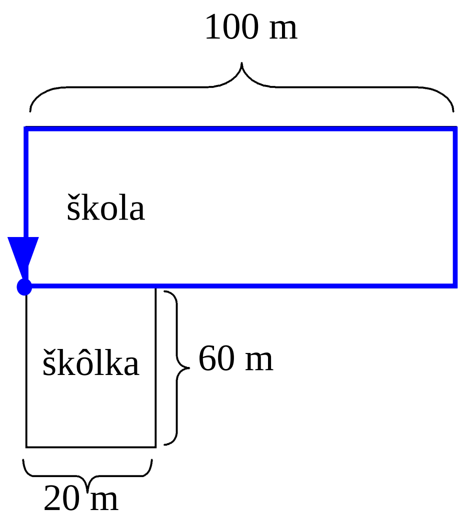
Z4-I-6

Veronika chodí večer behať. Keď behá s tatinom, obehnú tri razy škôlku aj školu (obr. č. 3). Keď behá s mamou, obehnú štyri razy len školu (obr. č. 4). Pritom prebehnú rovnako veľa ako s tatinom. Dnes ide behať sama iba okolo škôlky (obr. č. 5). Koľkokrát ju má obehnúť, aby prebehla opäť rovnako veľa ako s tatinom?

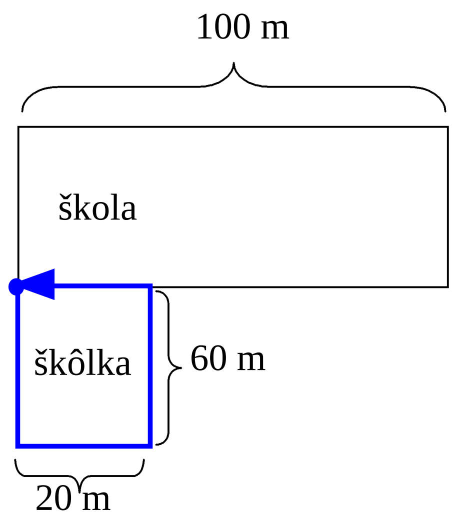
(*Dillingerová*)



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Kategória Z5

Z5-I-1

Doplňte do tabuľky prirodzené čísla tak, aby v každom jej bielom políčku bol súčin príslušných čísel z jej šedého záhlavia.

(*Bednářová*)

		b		
a		*a.b*		

	6	3		
		12		
		9	72	
			56	49

Z5-I-2

Nevill zabudol heslo pre vstup do veže. Profesorka Mc Gonagallová mu však poradila, že heslo

- sa skladá z 3 rôznych písmen,
- dobre sa vyslovuje, lebo v ňom nie sú 2 spoluhlásky vedľa seba,
- všetky písmená hesla nájde v mene vedúceho učiteľa Slizolinu - „Snape“.

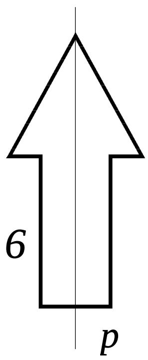
Po vyskúšaní tretiny všetkých hesiel vyhovujúcich týmto podmienkam sa vstup do veže otvoril. Koľko hesiel Nevill vyskúšal?

(*Dillingerová*
)

Z5-I-3

O mnohouholníku načrtnutom na obrázku č.6 vieme, že ho priamka *p* delí na dve rovnaké časti a že 4 jeho rôzne dlhé strany merajú 3, 4, 5 a 6 cm. Aký obvod môže mať tento mnohouholník?

Obr. 6



(*Bednářová*)

Z5-I-4

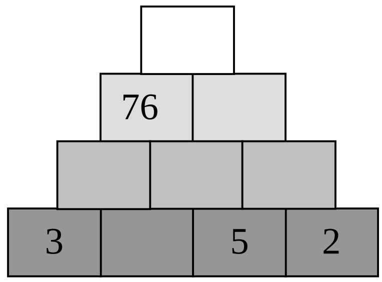
Mišo mal včera o 15 samolepiek viac ako Jožo. Dnes však ale 17 svojich vymenil za 9 Jožových a ďalších 7 vymenil za 13 Ferových. Jožo okrem tých deviatich, ktoré vymenil za 17 Mišových, vymenil ešte 11 svojich za 6 Andrejových. Ktorý z chlapcov má teraz viac samolepiek, Mišo alebo Jožo? O koľko?

(*Bednářová*)

Z5-I-5

Doplňte do obrázku č. 7 čísla tak, aby bol na každej tehličke napísaný súčet všetkých čísel, ktoré sú na tehličkách od nej tmavších.

(*Bednářová*)

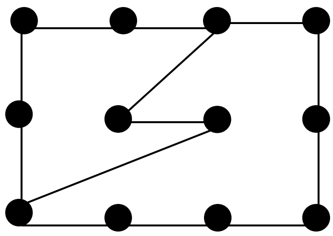


Obr. 7

Z5-I-6

Na obrázku č. 8 sú znázornené päťuholník a šesťuholník s vrcholmi v mrežových bodoch štvorcovej siete. Určte obsah šesťuholníka, ak viete, že päťuholník má obsah 7,5 cm^2.

(*Bednářová*)



Obr. 8

Kategória Z6

Z6-I-1

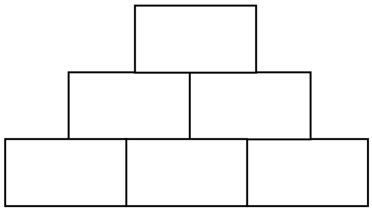
Snehulienka pripravuje svojich sedem trpaslíkov na prijímacie skúšky na SŠPT (strednú školu pre trpaslíkov). V prvom cvičnom diktáte spravili trpaslíci priemerne 35 chýb. V druhom Šťastko spravil o 15 chýb menej ako v prvom, Spachtoš sa zhoršil o 13 a Kýblik o 2 chyby. Hapčí sa zlepšil o 9 a Vedko dokonca o 19 chýb. Ostatní dvaja trpaslíci spravili v druhom diktáte rovnako veľa chýb ako v prvom. Koľko chýb priemerne spravili trpaslíci v druhom diktáte?

(*Bednářová*)

Z6-I-2

Doplňte do sčítacej pyramídy znázornenej na obrázku č. 9 čísla tak, aby medzi dopĺňanými číslami boli aj čísla: –1,2 ; 2,3 ; –3,4
a aby hore bolo

a) čo najväčšie číslo,
b) čo najmenšie číslo.



Obr. 9

(*Bednářová*)

Z6-I-3

Boris postavil z 32 zápaliek obdĺžnik s rôzne dlhými stranami. Jeho sestra vložila do obdĺžnika niekoľko zápaliek a tak ho rozdelila presne na 7 štvorcov. Koľko zápaliek mohli merať strany Borisovho obdĺžnika? Všetky použité zápalky boli rovnako dlhé a nelámali ich.

(*Ptáčková*)

Z6-I-4

Odvtedy, čo si Novákovci kúpili šteniatka Punťu a Fľaka, boli každý deň na jednej prechádzke. Niekedy so sebou zobrali Punťu, niekedy Fľaka, nikdy nie však oboch psíkov naraz. Punťa zatiaľ ostala doma 14-krát, Fľak 16-krát. Na osemnástich prechádzkach však niektorého zo psíkov mali. Ako dlho už Novákovci majú Punťu a Fľaka?

(*Bednářová*)

Z6-I-5

Finále súťaže o najkrajšieho šarkana sa zúčastnili Adam, Baška a Zuzka. Každý z 22 porotcov pridelil každému z finalistov 1, 2 alebo 3 body – vždy iný počet. Adam získal 3 body toľkokrát ako 1 bod. Dva body mu pridelilo o 4 viac porotcov ako tri body. Baška získala 3 body rovnako veľakrát ako Zuzka, zato 2 body pridelilo Baške dva razy toľko porotcov ako Zuzke. Ktorý z finalistov získal najväčší počet bodov a vyhral? Koľko bodov to bolo?

(*Majer*)

Z6-I-6

Kubo mal v krabici 100 rovnakých drevených kociek s hranou 1 dm. Z niektorých z nich postavil veľkú kocku a 5 jej stien zafarbil na červeno. Potom túto kocku zbúral a zo všetkých kociek, z ktorých bola postavená, postavil kváder. Aj ten mal práve 5 stien zafarbených na červeno. Aké rozmery mala veľká kocka a aké kváder?

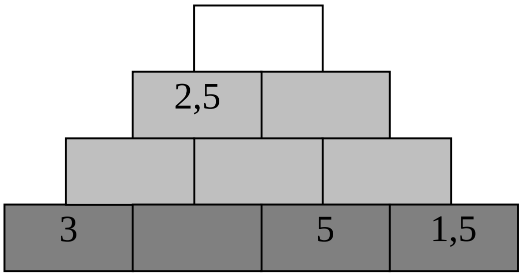
(*Hozová*)

Kategória Z7

Z7-I-1

Doplňte do pyramídy na obrázku č. 10 chýbajúce čísla tak, aby bol na každej tehličke napísaný aritmetický priemer čísel, ktoré sú na tehličkách od nej tmavších.

(*Bednářová*)



Obr. 10

Z7-I-2

Zuzka, Peťo, Jakub a Hanka hrali guľky. Keď hra skončila, chýbali Zuzke do polovice všetkých guliek 4, Peťo mal jednu pätinu a ešte 6 guliek, Jakub trikrát menej ako Zuzka a Hanka o jednu guľku menej ako Jakub. Ktoré z detí malo po skončení hry najviac a ktoré najmenej guliek?

(*Bednářová*)

Z7-I-3

V pravidelnom 5-uholníku *ABCDE* so stranou dĺžky 5 cm označme *M* priesečník úsečiek *AC* a *BD*. Vypočítajte dĺžku úsečky *AM* a veľkosť uhla *AMB*.

Z7-I-4

Koľko najmenej činiteľov musí mať súčin $\left(2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{1}{4}\right)\cdot\mathbf{K}$, aby bol deliteľný stomi?

(*Ptáčková*)

Z7-I-5

Narysovali sme rovnostranný trojuholník. Rozdelili sme ho na štyri zhodné časti. Jednu z nich sme zafarbili a zvyšok trojuholníka sme opäť rozdelili na 4 zhodné časti. Narysuj obrázok, ktorý sme takto získali.

(*Hozová*)

Z7-I-6

Počas dovolenky pani Smoliarikovej 15-krát pršalo, nikdy nie však celý deň: Ak pršalo doobeda, bolo poobede jasno. Ak pršalo poobede, bolo jasno ten deň doobeda. Jasno bolo 9 dopoludní a 8 popoludní. Ako dlho trvala dovolenka pani Smoliarikovej?

(*Bednářová*)

Kategória Z8

Z8-I-1

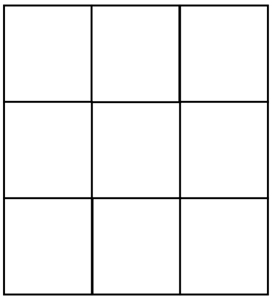
Do tabuľky na obrázku č. 11 vpíšte navzájom rôzne prirodzené čísla tak, aby súčin čísel v každom riadku, v každom stĺpci a na oboch diagonálach bol 1 000 a zároveň aby súčet čísel v prvom riadku aj v prvom stĺpci bol čo najväčší.

(*Tlustý*)

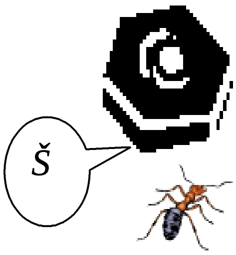
Z8-I-2

Mravec obieha rýchlosťou 1 cm za 4 sekundy po dráhe pravidelného šesťuholníka so stranou dĺžky 1 cm okolo matice znázornenej na obrázku č. 12. Ako ďaleko od miesta, z ktorého vyštartoval (bod *Š*), bude za 2 a štvrť minúty?

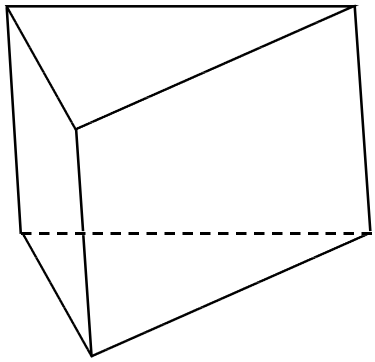
(*Bednářová*)



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

Z8-I-3

Na obrázku č. 13 je trojboký hranol. Koľko existuje takých trojuholníkov, ktorých strany sú len hrany alebo stenové uhlopriečky tohto hranola?

(*Dillingerová*)

Z8-I-4

V tábore bolo 80 detí. Rozdelili sa do 5 skupín. Vedúci však nebol spokojný, a tak pätinu detí z prvej skupiny presunul do druhej. Ešte stále to nebolo úplne dobré, tak presunul pätinu detí z druhej do tretej skupiny. Potom ešte pätina detí z tretej skupiny prešla do štvrtej, pätina detí zo štvrtej skupiny prešla do piatej a nakoniec pätina detí z piatej skupiny sa pridala k prvej skupine. Takto vznikli skupiny s rovnakým počtom detí. Koľko detí bolo v jednotlivých skupinách pôvodne?

(*Volfová*)

Z8-I-5

Slečna Vectorová dala na aritmancii Hermione takúto úlohu: „Narodila som sa v taký deň a mesiac, ktorých dátum zapísaný bez bodiek je súčasne poradovým číslom tohto dňa v roku. (Napr. dátum 14.1. dá číslo 141, ale je to iba 14. deň v roku.) Ak vynásobíš deň a mesiac mojich narodenín, dostaneš môj vek v roku 2201. Zisti kedy som sa narodila.“ Vypočítajte to aj vy.

(*Dillingerová*)

Z8-I-6

Radka rada posiela z mobilného telefónu textové správy (SMS).
Každý deň pošle 3. Zaslanie jednej správy stojí 2,50 Sk. Pri zaslaní väčšieho počtu správ má možnosť vybrať si práve jednu z nasledujúcich prémií:
Po zaslaní 10 SMS môže poslať 1 SMS zadarmo.
Po zaslaní 100 SMS môže poslať 10 SMS zadarmo.
Po zaslaní 1000 SMS môže poslať 100 SMS zadarmo.
Koľko korún najmenej zaplatí za poslané SMS za jeden rok, od prvej odoslanej SMS?

(*Bálintová*)

Kategória Z9

Z9-I-1

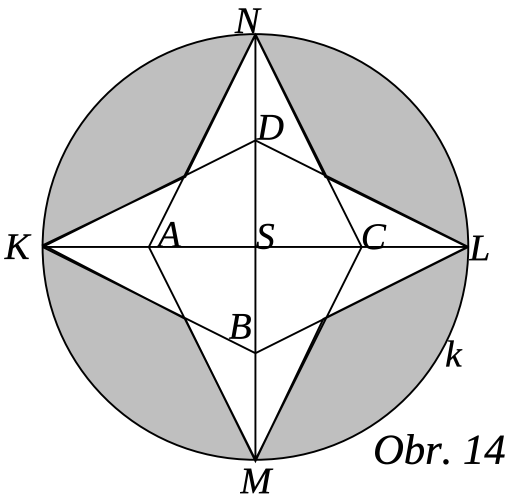
Nahraďte hviezdičky v čísle 683 *** vhodnými ciframi tak, aby výsledné 6-ciferné číslo bolo deliteľné 7, 8 a 9.

(*Tlustý*)

Z9-I-2

Vypočítajte obsah šedej plochy vyznačenej na obrázku č. 14, ak viete, že *KL* a *MN* sú dva navzájom kolmé priemery kružnice *k*(*S*, 6 cm) a *A*, *B*, *C* a *D* sú stredy úsečiek *KS*, *MS*, *LS* a *NS* .

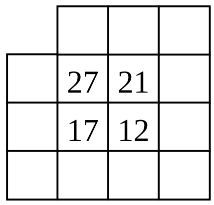
(*Bednářová*)



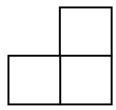
Obr. 14

Z9-I-3

Do tabuľky na obrázku č. 15a boli doplnené čísla tak, že súčet trojice čísel v každom „trojštvorčeku“ (Obr. č 15b) bol rovnaký. „Trojštvorček“ sa pritom nesmie otáčať. Určte súčet všetkých čísel v tabuľke.



Obr. 15a



Obr. 15b

(*Dillingerová*)

Z9-I-4

Na priemere kružnice $k(S;r)$ ležia stredy kružníc $l(A;r_1)$ a $m(B;r_2)$. Kružnice *l* a *m* majú vzájomný vonkajší dotyk a obe sa dotýkajú aj kružnice *k*. Okrem nich leží v kružnici *k* ešte kružnica $n(C;r_3)$, ktorá sa všetkých troch (teda *l*, *m* aj *k*) dotýka. Svetlana si myslí, že obvod trojuholníka *ACS* je väčší ako priemer kružnice *k*. Má pravdu? Prečo?

(*Volfová*)

Z9-I-5

Priemerný vek žiaka našej školy je 10 rokov, priemerný vek učiteľa 54, priemerný vek všetkých učiacich sa a vyučujúcich spolu je 12 rokov. Zistite priemerný počet detí v triedach tejto školy, ak viete, že učitelia učia v priemere 21 hodín týždenne a žiaci majú priemerne 24 vyučovacích hodín do týždňa.

(*Bednářová*)

Z9-I-6

Zvyčajne chodí Mišo zo školy peši. Ak však ide na bicykli, jeho priemerná rýchlosť sa zvýši o 10 km/h a čas, za ktorý príde domov sa skráti o 15 minút, Ak pre neho príde otec autom, priemerná rýchlosť vzrastie oproti chodeniu peši šesťnásobne a čas sa skráti o 20 minút. Ako ďaleko to má Mišo zo školy domov? (Peši, na bicykli aj autom chodí tou istou trasou.)

(*Dillingerová*)

Na ukážku uvádzame ***vzorové riešenie*** jednej úlohy zo staršej olympiády:

Úloha Z8-II-1.

Daný je obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán. Ak zväčšíme jednu jeho stranu o 4 a druhú zmenšíme o 5, dostaneme obdĺžnik s dvojnásobným obsahom. Určte strany daného obdĺžnika. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. Dĺžky strán obdĺžnika označíme *a*, *b*. Nový obdĺžnik má dĺžky strán *a* + 4, *b* – 5. Podľa podmienky úlohy pre obsahy oboch obdĺžnikov platí:

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupne upravíme: $ab - 4b + 5a = -20$

$$ab - 4b + 5a - 20 = -40$$

(odčítame 20, aby sme mohli ľavú stranu upraviť na súčin)

$$(a-4)(b+5) = -40\,.$$

Riešenie nájdeme rozkladom čísla -40 na 2 činitele. Pritom musí byť *a* > 0, *b* > 0, a teda $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$.

Sú dve možnosti: $(-2).20 = -40$ a $(-1).40 = -40$.

V prvom prípade dostaneme obdĺžnik o stranách *a* = 2, *b* = 15 s obsahom *S* = 30. Nový obdĺžnik má potom strany *a´* = 6, *b´* = 10 a obsah *S´* = 60, t.j. *S´* = 2*S*.

V druhom prípade dostaneme obdĺžnik so stranami *a* = 3, *b* = 35 s obsahom *S* = 105. Nový obdĺžnik má potom strany *a´* = 7, *b´* = 30 a obsah *S´* = 210. Opäť je *S´* = 2*S*.

Na záver jedna rada:

Úlohy nie sú ľahké. Nenechajte sa odradiť, keď neobjavíte hneď riešenie. Experimentujte, kreslite si, „hrajte sa“ s úlohou. Niekedy pomôže pozrieť sa do nejakej knižky, kde nájdete podobné úlohy vyriešené, inokedy sa môže stať, že zrazu o tri dni „z ničoho-nič“ na riešenie prídete.

Prajeme vám veľa úspechov a radosti pri riešení úloh MO a v škole.

Súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva SR spolu s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Súťaž riadi Slovenská komisia MO, v jednotlivých okresoch okresné komisie MO. Na jednotlivých školách súťaž zaisťujú učitelia matematiky.

Vy sa vždy obracajte na svojho učiteľa matematiky.

52. ročník Matematickej olympiády
Leták pre kategórie Z4 - Z9

Náklad: 2500 výtlačkov
Vydala IUVENTA pre vnútornú potrebu MŠ SR

Zodpovedný redaktor: RNDr. Monika Dillingerová