

2018/2019
68. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie A

(Termín odovzdania: v pondelok 3. decembra 2018.)

1. O postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vieme, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

- a) Nájdite všetky hodnoty a_1 , pre ktoré je táto postupnosť konštantná.
b) Nech $a_1 = 5$. Určte najväčšie celé číslo neprevyšujúce a_{2018} . (Vojtech Bálint)

2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC . Označme D päť výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových súmernostiach postupne podľa priamok AB, AC . Ďalej označme E_1 a E_2 body na priamke BC také, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokážte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 ležia na jednej kružnici, ktorej stred leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC . (Patrik Bak)

3. Nájdite všetky nezáporné celé čísla m, n , pre ktoré platí $|4m^2 - n^{n+1}| \leq 3$. (Tomáš Jurík)

4. Daná je množina M prirodzených čísel s n prvkami, pričom n je nepárne číslo väčšie ako jedna. Dokážte, že počet usporiadaných dvojíc (p, q) rôznych prvkov z M takých, že aritmetický priemer čísel p, q je prvkom M , je nanajvyš $\frac{1}{2}(n-1)^2$. (Martin Panák, Patrik Bak)

5. Zostrojte trojuholník ABC , ak poznáte jeho obvod o , polomer ρ kružnice pripísanej ku strane BC a veľkosť výšky v na túto stranu. Uveďte diskusiu v závislosti od daných dĺžok. (Patrik Bak)

6. Na hracom pláne je nakreslený pravidelný n -uholník s jedným vrcholom vyznačeným ako pasca. Tom a Jerry hrajú nasledujúcu hru. Na začiatku Jerry postaví figúrku na niektorý vrchol n -uholníka. V každom kroku potom Tom povie nejaké prirodzené číslo a Jerry posunie figúrku o tento počet vrcholov podľa svojej voľby buď v smere, alebo proti smeru chodu hodinových ručičiek. Nájdite všetky $n \geq 3$, pri ktorých môže Jerry ťahať figúrkou tak, aby nikdy neskončila v pasci. Ako sa zmení odpoveď, keď je Tom k plánu otočený chrbtom, pozná iba dané n a nevidí, kam Jerry figúrku na začiatku postaví ani kam s ňou v jednotlivých krokoch ťahá? (Pavel Calábek)