

2018/2019
68. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie C

(Termín odovzdania: v pondelok 21. januára 2019.)

1. Neznáme číslo je deliteľné práve štyrmi číslami z množiny $\{6, 15, 20, 21, 70\}$. Určte, ktorými. (Michal Rolínek)

2. Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B sú postupne stredmi úsečiek CF a CG . Priamka CD pretína priamku FB v bode I a priamka CE pretína priamku AG v bode J . Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG . (Pavel Calábek)

3. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 3, a každé z nich je nanajvýš 2. Dokážte, že platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

(Patrik Bak)

4. Každé políčko tabuľky 2×13 ofarbíme práve jednou zo štyroch farieb. Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby žiadne dve susedné políčka neboli ofarbené rovnakou farbou? (Za susedné považujeme práve tie políčka tabuľky, ktoré majú spoločnú stranu.) (Jaroslav Švrček)

5. Nech $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \psi, \omega$ sú postupne veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B, C, D, E, F, G, H konvexného osemuholníka $ABCDEFGH$, v ktorom platí

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = \psi + \omega.$$

Označme ďalej K, L, M, N postupne stredy uhlopriečok AD, CF, EH, GB . Dokážte, že priamky KM a LN sú navzájom kolmé. (Josef Tkadlec)

6. Nájdite všetky trojciferné čísla n s tromi rôznymi nenulovými ciframi, ktoré sú deliteľné súčtom všetkých troch dvojciferných čísel, ktoré dostaneme, keď v pôvodnom čísle vyškrtujeme vždy jednu cifru. (Jaromír Šimša)