2017/2018
67. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 27. 8. – 2. 9. 2018.*)

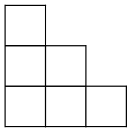
Súťaž jednotlivcov:

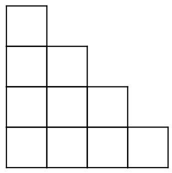
I-1. Označme $\mathbb{Q}^+$ množinu všetkých kladných racionálnych čísel a nech $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ spĺňajúce

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{pre všetky } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

(*Rakúsko*)

I-2. Útvary znázornené na obrázkoch pozostávajúce zo 6, respektíve 10 jednotkových štvorcov nazývame *schodíky*. Majme tabuľku s rozmermi 2018×2018 pozostávajúcu z 2018^2 políčok





s rozmermi jednotkového štvorca. Z tabuľky odstránime ľubovoľné dve políčka z rovnakého riadku. Dokážte, že zvyšok tabuľky nie je možné (pri rezaní po hraniciach políčok) rozrezať na schodíky (ľubovoľne otočené). (*Ukrajina*)

I-3. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| < |AC|$ a nech D je päta výšky z vrcholu A. Nech R a Q sú postupne ťažiská trojuholníkov ABD a ACD. Nech P je bod na úsečke BC taký, že $P \neq D$ a body P, Q, R a D ležia na jednej kružnici. Dokážte, že priamky AP, BQ a CR sa pretínajú v jednom bode. (*Patrik Bak, Slovensko*)

I-4.
a) Dokážte, že pre každé kladné celé číslo m existuje celé číslo $n \geqq m$ také, že

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \qquad (*)$$

b) Označme $p(m)$ najmenšie celé číslo $n \geqq m$ také, že platí $(*)$. Dokážte, že $p(2018) = p(2019)$.

Poznámka. Pre reálne číslo x označujeme $\lfloor x \rfloor$ najväčšie celé číslo neprevyšujúce x.
(*Patrik Bak, Slovensko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Nech a, b a c sú kladné reálne čísla spĺňajúce $abc = 1$. Dokážte, že

$$\frac{a^2-b^2}{a+bc} + \frac{b^2-c^2}{b+ca} + \frac{c^2-a^2}{c+ab} \leqq a+b+c-3.$$

(*Poľsko*)

T-2. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa $n \geqq 2$ s racionálnymi koeficientmi taký, že $P(x)$ má n po dvoch rôznych reálnych koreňov, ktoré tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že medzi koreňmi $P(x)$ sú dva, ktoré sú aj koreňmi nejakého polynómu stupňa 2 s racionálnymi koeficientmi. (*Rakúsko*)

T-3. Skupina pirátov sa pohádala a teraz každý z nich mieri na iných dvoch pirátov. Všetci piráti sú postupne vyvolávaní v nejakom poradí. Ak je vyvolaný pirát stále naživе, vystrelí na oboch pirátov, na ktorých mieri (niektorí z nich môžu byť už mŕtvi). Všetky strely sú hneď smrteľné. Po tom, čo všetci piráti boli vyvolaní, sa zistilo, že 28 pirátov bolo zabitých. Dokážte, že nech by boli piráti vyvolaní v akomkoľvek inom poradí, aspoň 10 z nich by bolo zabitých aj tak. (*Josef Tkadlec, Česko*)

T-4. Nech n je kladné celé číslo a $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sú kladné celé čísla neprevyšujúce 2^k pre nejaké celé číslo $k \geqq 3$. *Reprezentácia* celého čísla t je postupnosť nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taká, že

$$t = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n.$$

Dokážte, že ak celé číslo t má reprezentáciu, tak má aj reprezentáciu, kde menej ako $2k$ z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je nenulových. (*Poľsko*)

T-5. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| < |AC|$ a nech D je päta výšky z vrcholu A. Body B' a C' ležia na polpriamkach AB a AC tak, že body B', C' a D ležia na jednej priamke a body B, C, B' a C' ležia na jednej kružnici so stredom O. Dokážte, že ak M je stred BC a H je ortocentrum trojuholníka ABC, tak $DHMO$ je rovnobežník. (*Patrik Bak, Slovensko*)

T-6. Nech ABC je trojuholník. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode L a kružnicu opísanú trojuholníku ABC znova v bode $W \neq B$. Nech K je kolmý priemet bodu L na priamku AW. Kružnica opísaná trojuholníku BLC pretína priamku CK znova v bode $P \neq C$. Priamky BP a AW sa pretínajú v bode T. Dokážte, že $|AW| = |WT|$. (*Ukrajina*)

T-7. Nech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je postupnosť kladných celých čísel taká, že

$$a_1 = 1 \qquad \text{a} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1 \quad \text{pre všetky kladné celé čísla } k.$$

Dokážte, že pre každé prvočíslo p tvaru $3l + 2$, kde l je nezáporné celé číslo, existuje kladné celé číslo n také, že a_n je deliteľné p. (*Poľsko*)

T-8. Celé číslo n nazývame *sliezske*, ak existujú kladné celé čísla a, b a c také, že

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

a) Dokážte, že existuje nekonečne veľa sliezskych čísel.
b) Dokážte, že nie všetky kladné celé čísla sú sliezske. (*Nemecko*)