MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Kategórie A, B, C

51. ROČNÍK, 2001/2002

Študenti stredných škôl,

pozývame vás zúčastniť sa matematickej olympiády, súťaže pre žiakov stredných škôl našej republiky.

Kategória A je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov,
kategória B žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky,
kategória C žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.

Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií je určená kategória C. Kategória P z programovania a matematickej informatiky je určená pre študentov všetkých ročníkov stredných škôl a má samostatný leták so zadaniami úloh domáceho kola.

Organizácia súťaže v kategóriách A, B, C:

V **domácej** časti **I. kola** na vás čaká šesť úloh, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **26. novembra 2001** (kategória A) a do **14. januára 2002** (kategórie B, C). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice *1 – výborne, 2 – dobre, 3 – nevyhovuje.* Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školskej** časti **I. kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia **školského aj domáceho** kola **úspešných riešiteľov školského kola** potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov I. kola do **II. kola** (krajského), v ktorom budú počas štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách B a C tým súťaž končí. O poradí v druhých kolách súťaže rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy, pričom bodové hodnotenie každej úlohy je nezáporné celé číslo menšie ako 7. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je ich poradie označené zhodne 1.–n. miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii A budú ešte najlepší riešitelia II. kola z celej republiky súťažiť v **III. kole**, celoštátnom, kde budú dva dni (po štyroch hodinách) riešiť dve trojice úloh. Najviac polovica účastníkov tohto kola bude vyhlásená za úspešných riešiteľov a najviac štvrtina za víťazov 51. ročníka MO v kategórii A. Z víťazov III. kola sa vyberá družstvo Slovenskej republiky na medzinárodnú matematickú olympiádu a akúkoľvek štátnu reprezentáciu.

Predbežne boli stanovené tieto termíny 51. ročníka MO:

	I. kolo (školská časť)	II. kolo (krajské)	III. kolo (celoštátne)
Kategória A	4. 12. 2001	15. 1. 2002	7.–10. 4. 2002
Kategórie B, C	22. 1. 2002	26. 3. 2002	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov a Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.* Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA — zariadenie pre voľný čas detí, mládeže i dospelých MŠ SR v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou MO.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

Emil Kruh
1.C, Gymnázium L. Eulera
Divoké nám. 5, 940 01 Nové Zámky
kraj Nitra
2001/2002
C–I–3

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a očíslujte strany. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

KATEGÓRIA A

A–I–1

Ak je S obsah trojuholníka so stranami a, b, c a T je obsah trojuholníka so stranami $a+b, b+c, c+a$, potom platí $T \geqq 4S$. Dokážte a zistite, kedy nastane rovnosť. (*P. Kaňovský*)

A–I–2

V obore celých čísel x, y riešte rovnicu

$$(x_5)^2 + \left(y^4\right)_5 = 2xy^2 + 51\,,$$

kde n_5 označuje násobok piatich najbližší k číslu n, napríklad $(-9)_5 = -10$. (*P. Černek*)

A–I–3

V danom trojuholníku ABC pretína os uhla ACB stranu AB v bode K a opísanú kružnicu v bode L ($L \neq C$). Označme V stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, S stred kružnice opísanej trojuholníku KBV a Z priesečník priamok AB a SL. Dokážte, že priamka SK je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku KLZ. (*J. Földes*)

A–I–4

Nech $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Pre ktoré hodnoty reálneho parametra p má sústava rovníc

$$\begin{aligned}
x_1^4 + \frac{2}{x_1^2} &= px_2\,,\\
x_2^4 + \frac{2}{x_2^2} &= px_3\,,\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\,,\\
x_{n-1}^4 + \frac{2}{x_{n-1}^2} &= px_n\,,\\
x_n^4 + \frac{2}{x_n^2} &= px_1\,,
\end{aligned}$$

aspoň dve riešenia v obore reálnych čísel? (*J. Švrček*)

A–I–5

Nájdite všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré pre každé reálne číslo x spĺňajú rovnosť

$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) = 2xP(x)\,.$$

(*E. Kováč*)

A–I–6

Nájdite všetky štvorsteny, ktoré majú sieť tvaru deltoidu a práve štyri hrany danej dĺžky a. (Deltoidom rozumieme konvexný štvoruholník, ktorý je súmerný podľa *jedinej* zo svojich uhlopriečok; nepatrí k nim ani štvorec, ani kosoštvorec.) (*P. Leischner*)

KATEGÓRIA B

B–I–1

Do tabuľky 4×4 sú vpísané kladné reálne čísla tak, že súčin v každej pätici tvaru  je rovný 1. Zistite maximálny počet rôznych čísel zapísaných v tabuľke. *(P. Černek)*

B–I–2

Určte, koľko čísel môžeme vybrať z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 75\,599, 75\,600\}$ tak, aby medzi nimi bolo číslo 75 600 a aby pre ľubovoľné dve vybraté čísla a, b platilo, že a je deliteľom b alebo b je deliteľom a. (Uveďte všetky možnosti.) *(J. Földes)*

B–I–3

Nech k je polkružnica zostrojená nad priemerom AB, ktorá leží vo vnútri štvorca $ABCD$. Uvažujme jej dotyčnicu t_1 z bodu C (rôznu od BC) a označme P jej priesečník so stranou AD. Nech t_2 je spoločná vonkajšia dotyčnica polkružnice k a kružnice vpísanej trojuholníku CDP (rôzna od AD). Dokážte, že priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé. *(J. Švrček)*

B–I–4

Pokiaľ máme $n \geqq 2$ prirodzených čísel, môžeme s nimi spraviť nasledujúcu operáciu: vyberieme niekoľko z nich, ale nie všetky a každé z vybratých čísel nahradíme ich aritmetickým priemerom. Zistite, či je možné pre ľubovoľnú začiatočnú n-ticu dostať po konečnom počte krokov všetky čísla rovnaké, ak n sa rovná

a) 2 000,
b) 35,
c) 3,
d) 17. *(J. Földes)*

B–I–5

Zistite, pre ktoré reálne čísla p má sústava

$$
\begin{aligned}
x^2y - 2x &= p \\
y^2x - 2y &= 2p - p^2
\end{aligned}
$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel. *(P. Černek)*

B–I–6

Je daný rovnostranný trojuholník MPQ. Nájdite množinu vrcholov C všetkých trojuholníkov ABC takých, že body P, Q sú päty výšok z vrcholov A, B a bod M je stred strany AB. *(J. Šimša)*

KATEGÓRIA C

C–I–1

Dokážte, že existuje jediná číslica c, pre ktorú možno nájsť jediné prirodzené číslo n končiace číslicou c a majúce vlastnosť, že číslo $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla. *(M. Koblížková)*

C–I–2

V štvoruholníku $ABCD$ sa uhlopriečky pretínajú v bode P, uhlopriečka AC je rozdelená bodmi P, N a M na štyri zhodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a uhlopriečka BD je rozdelená bodmi L, K a P na štyri zhodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určte pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$. *(J. Zhouf)*

C–I–3

Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel, ktoré sú riešením nerovnice

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}\,.$$

(J. Zhouf)

C–I–4

Jožko sa vracal z výletu. Najprv cestoval vlakom a potom pokračoval zo zastávky na bicykli. Celá cesta mu trvala presne 1 hodinu 30 minút a prešiel pri nej vzdialenosť 60 km. Vlak išiel priemernou rýchlosťou 50 km/h. Určte, ako dlho išiel Jožko na bicykli, keď jeho rýchlosť v km/h je vyjadrená prirodzeným číslom rovnako ako vzdialenosť meraná v km, ktorú prešiel na bicykli. *(E. Kováč)*

C–I–5

Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC danej dĺžky a, ak je daný stred P strany AB a bod Q ($Q \neq P$), ktorý je pätou výšky z vrcholu B. *(J. Švrček)*

C–I–6

Istý panovník pozval na oslavu svojich narodenín 28 rytierov. Každý z rytierov mal medzi ostatnými práve troch nepriateľov.

a) Ukážte, že panovník môže rytierov rozsadiť k dvom stolom tak, aby každý rytier sedel pri rovnakom stole najviac s jedným nepriateľom.

b) Ukážte, že v prípade ľubovoľného takéhoto rozsadenia sedí pri každom stole najviac 16 rytierov.

(Nepriateľstvo je vzájomný vzťah: Ak A je nepriateľom B, tak aj B je nepriateľom A.) *(J. Šimša)*

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

51. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B a C

Vydala IUVENTA

pre vnútornú potrebu Ministerstva školstva SR

1. vydanie

Programom TEX pripravili Karel Horák a Juraj Földes