68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019
Riešenia úloh domáceho kola kategórie A

---

1. *O postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vieme, že pre všetky prirodzené čísla n platí*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

a) Nájdite všetky hodnoty a_1, pre ktoré je táto postupnosť konštantná.
b) Nech $a_1 = 5$. Určte najväčšie celé číslo neprevyšujúce a_{2018}.

(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. a) Predpokladajme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konštantná. Potom musí platiť $a_2 = a_1$, čo môžeme použitím vzťahu zo zadania zapísať ako

$$a_1 = \frac{a_1^2}{a_1^2 - 4a_1 + 6}.$$

Túto rovnicu ľahko ekvivalentne upravíme na $a_1(a_1-2)(a_1-3) = 0$. Z toho dostávame, že $a_1 \in \{0, 2, 3\}$. Je vidno, že pre tieto hodnoty a_1 je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ naozaj konštantná a všetky jej členy sú rovné a_1. Formálne by sme to dokázali matematickou indukciou.

b) Nech $a_1 = 5$. Postupne vypočítavame niekoľko ďalších členov postupnosti (a_n). Dostaneme $a_2 \approx 2{,}27$, $a_3 \approx 2{,}49$, $a_4 \approx 2{,}77$, atď. Z toho môžeme nadobudnúť dojem, že pre všetky $n \geqq 2$ platí $2 < a_n < 3$. Túto hypotézu dokážeme matematickou indukciou.

Pre $n = 2$ tvrdenie zjavne platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre dané $n \geqq 2$. Potom

$$3 - a_{n+1} = 3 - \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6} = \frac{2(a_n-3)^2}{(a_n-2)^2+2} > 0,$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6} - 2 = \frac{(6-a_n)(a_n-2)}{(a_n-2)^2+2} > 0.$$

To dokazuje obe nerovnosti $2 < a_{n+1} < 3$, takže dôkaz matematickou indukciou je hotový. Platí teda aj $2 < a_{2018} < 3$, z čoho vyplýva, že najväčšie celé číslo neprevyšujúce a_{2018} je 2.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. O postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vieme, že pre všetky prirodzené čísla n platí $b_{n+1} = b_n^2 - 2$. Nájdite všetky hodnoty b_1, pre ktoré sú všetky členy $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ rovné b_1. [Zo vzťahu pre $n = 1$ dostávame $b_1 = b_1^2 - 2$, z čoho $b_1 \in \{-1, 2\}$. Následne overíme, že tieto hodnoty vyhovujú.]

N2. O postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vieme, že $b_1 = 1$ a že pre všetky prirodzené čísla n platí $b_{n+1} = 3b_n/(b_n+1)$. Dokážte, že všetky členy postupnosti sú z intervalu $\langle 1, 2)$. [Matematickou indukciou overte, že pre všetky prirodzené n platia nerovnosti $1 \leqq b_n < 2$.]

D1. O postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je známe, že pre všetky prirodzené čísla n platí $b_{n+1} = 2b_n^2/(b_n^2-3)$. Nájdite všetky hodnoty b_1 také, že postupnosť $b_2, b_3, b_4, \ldots$ je konštantná. [Odvoďte, že $b_{n+1} = b_n$ práve vtedy, keď $b_n \in \{-1, 0, 3\}$, takže b_2 musí byť rovné jednej z týchto hodnôt. Následne vypočítavame zodpovedajúce hodnoty b_1. Výsledok je $b_1 \in \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.]

D2. Odvoďte explicitné vyjadrenie postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ z úlohy N2. [Zadaný vzťah upravíme na $3 \cdot 1/b_{n+1} = 1 + 1/b_n$. Postupnosť $c_n = 1/b_n$ teda spĺňa rovnosť $3c_{n+1} = c_n + 1$.

Substitúciou $c_n = d_n + 1/2$ sa zbavíme konštantného člena a dostaneme $3d_{n+1} = d_n$. Postupnosť d_n je teda geometrická, takže dokážeme určiť jej explicitný tvar. Spätným dosadzovaním postupne nájdeme vyjadrenie pre b_n. Výsledok je $b_n = 2\cdot 3^{n-1}/(3^{n-1} + 1)$.]

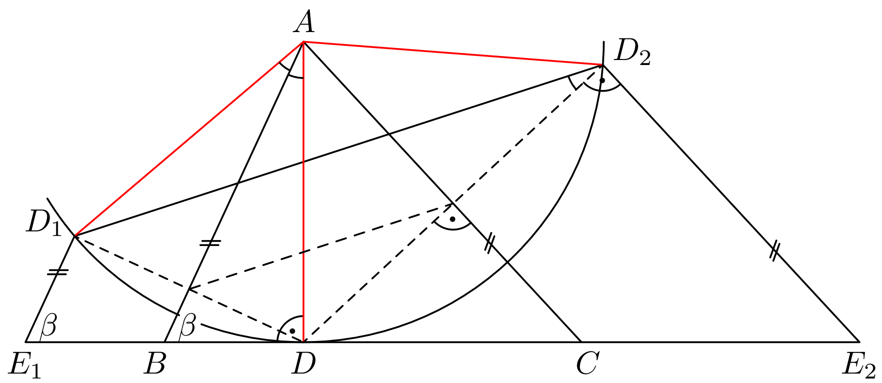
D3. Najznámejšia rekurentne definovaná postupnosť je Fibonacciho postupnosť. Tá je daná vzťahmi $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ a rekurentným vzťahom $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ platiacim pre každé $n \geqq 3$. Dokážte, že $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$ a $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$. [Postupujte matematickou indukciou podľa n.]

---

2. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme D pätu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových súmernostiach postupne podľa priamok AB, AC. Ďalej označme E_1 a E_2 body na priamke BC také, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokážte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 ležia na jednej kružnici, ktorej stred leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC.* (Patrik Bak)

Riešenie. Ako dokážeme, uvedené štyri body ležia na jednej kružnici v takom poradí, že tvoria vrcholy tetivového štvoruholníka $E_1E_2D_2D_1$. Najskôr však vysvetlíme, prečo je tento štvoruholník konvexný.

Keďže trojuholník ABC má podľa predpokladu ostré vnútorné uhly pri vrcholoch B a C,[1] leží bod D vnútri strany BC a výšky v pravouhlých trojuholníkoch ABD, ACD vedené z vrcholu D majú svoje päty vnútri strán AB, resp. AC. Tieto päty spolu s vrcholmi B, C tak tvoria vrcholy konvexného štvoruholníka, s ktorým je skúmaný štvoruholník $E_1E_2D_2D_1$ rovnoľahlý s koeficientom 2 podľa stredu D (obr. 1). Je to teda naozaj štvoruholník konvexný.



Obr. 1

Všimnime si, že vďaka osovým súmernostiam platí $|AD_1| = |AD| = |AD_2|$. Bod A je teda stredom kružnice opísanej trojuholníku D_1DD_2. Keďže priamka AD body D_1 a D_2 oddeľuje, obvodový uhol D_1D_2D v dotyčnej kružnici je rovný polovici konvexného stredového uhla D_1AD, ktorého osou je práve polpriamka AB. Preto sú zhodné tri ostré uhly D_1D_2D, D_1AB a DAB (vyznačené na obr. 1 oblúčikmi). Ich veľkosť je z pravouhlého trojuholníka ABD rovná $90° - \beta$, pričom ako zvyčajne $\beta = |\measuredangle ABC|$. Keďže uhol DD_2E_2 je zrejme pravý, má vnútorný uhol pri vrchole D_2 konvexného štvoruholníka $E_1E_2D_2D_1$ veľkosť

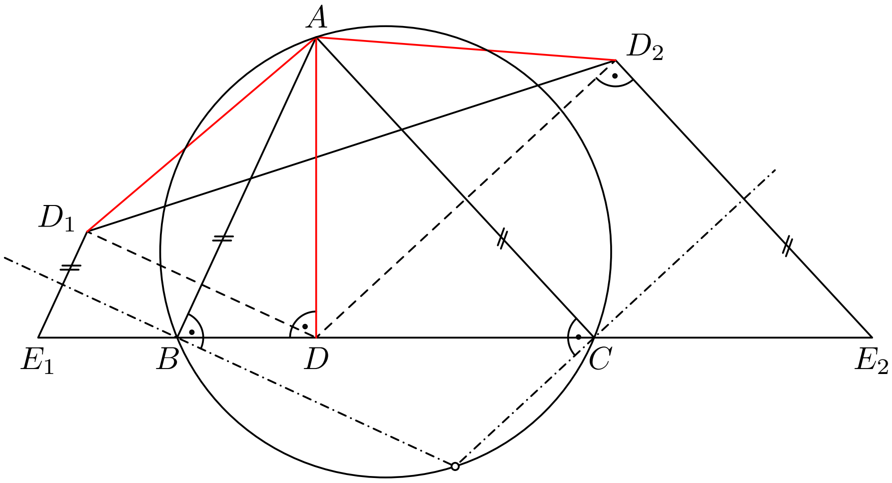
$$|\measuredangle D_1D_2E_2| = |\measuredangle D_1D_2D| + |\measuredangle DD_2E_2| = (90° - \beta) + 90° = 180° - \beta,$$

[1] Predpoklad, že aj uhol pri vrchole A je ostrý, v riešení potrebovať nebudeme.

zatiaľ čo vnútorný uhol pri protiľahlom vrchole E_1 má zrejme veľkosť β. Súčet oboch protiľahlých uhlov je tak $180°$, čiže $E_1E_2D_2D_1$ je skutočne tetivový štvoruholník.

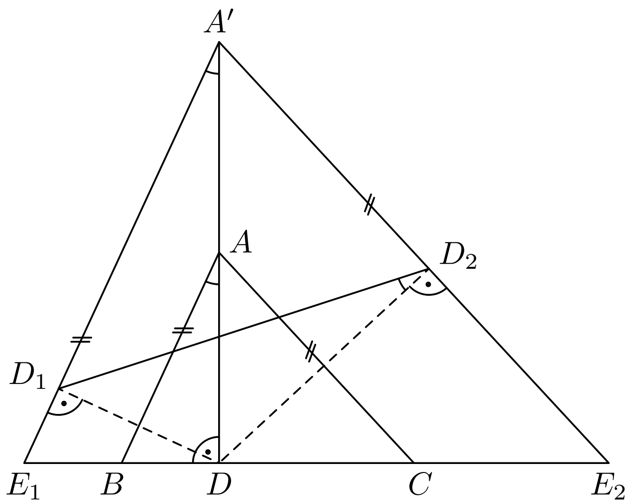
Prejdime k druhému tvrdeniu o tom, kde stred kružnice opísanej štvoruholníku $E_1E_2D_2D_1$ leží. Vieme, že je priesečníkom osí jeho strán, z ktorých pre naše úvahy vyberieme strany E_1D_1 a E_2D_2.

Trojuholník DE_2D_2 je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole D_2. Pritom bod C leží na osi strany DD_2 a na jeho prepone DE_2 – nutne teda musí byť jej stredom, a teda aj stredom kružnice tomuto trojuholníku opísanej. Os úsečky D_2E_2 tým pádom prechádza bodom C (obr. 2) a navyše je zrejme kolmá na AC. Analogicky os úsečky D_1E_1 je priamka kolmá na AB prechádzajúca bodom B. Tieto dve priamky sa zrejme pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC, lebo podľa Tálesovej vety musí spojnica ich priesečníkov s bodom A tvoriť priemer tejto kružnice. Tým je dôkaz celého tvrdenia ukončený.



Obr. 2

Iné riešenie. Ukážeme iný argument, prečo $|\measuredangle DD_2D_1| = 90° - \beta$, čo stačí na dôkaz, že $E_1E_2D_2D_1$ je tetivový. Body E_1, E_2 sú zrejme postupne obrazy bodov B, C v rovnoľahlosti so stredom D a koeficientom 2. Ak označíme A' obraz bodu A v tejto rovnoľahlosti (obr. 3), budú trojice bodov A', D_1, E_1 a A', D_2, E_2 zrejme kolineárne.



Obr. 3

Štvoruholník $A'D_1DD_2$ je pritom tetivový, lebo oba uhly $A'D_1D$ a $A'D_2D$ sú pravé. Z toho dostávame $|\measuredangle D_1D_2D| = |\measuredangle D_1A'D|$. A keďže $D_1A' \parallel BA$, je aj $|\measuredangle D_1A'D| = |\measuredangle BAD| = 90^\circ - \beta$, takže dokopy naozaj máme $|\measuredangle DD_2D_1| = 90^\circ - \beta$.

Iné riešenie. Ešte ďalším poučným spôsobom dokážeme prvú časť tvrdenia úlohy. Definujme bod A' ako v predošlom riešení (obr. 3). Potom použitím Euklidových viet v pravouhlých trojuholníkoch $A'E_1D$ a $A'E_2D$ dostávame $|A'D|^2 = |A'D_1| \cdot |A'E_1|$ a $|A'D|^2 = |A'D_2| \cdot |A'E_2|$. Spolu tak máme rovnosť

$$|A'D_1| \cdot |A'E_1| = |A'D_2| \cdot |A'E_2|.$$

Keďže bod A' leží zvonka oboch úsečiek D_1E_1 a D_2E_2, vyplýva z mocnosti[2] bodu A' ku kružnici opísanej trojuholníku $E_1D_1D_2$, že na tej kružnici leží aj bod E_2, t. j. že štvoruholník $D_1E_1E_2D_2$ je naozaj tetivový.

Poznámka. Existujú ďalšie alternatívne riešenia tejto úlohy pomocou situácie, ktorá vznikne po aplikovaní rovnoľahlosti so stredom v bode D a koeficientom $1/2$. Pomocou nej môže byť napríklad prvá časť úlohy formulovaná tak, že máme dokázať, že kolmé priemety päty D na strany AB a AC ležia spolu s bodmi B a C na kružnici. Táto formulácia je pomerne prirodzená. Druhá časť tvrdenia sa ale najlepšie dokazuje podľa obr. 2.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte vetu o obvodovom a stredovom uhle. [Majme kružnicu k so stredom O a jej tetivu AB. Nech X je bod na k. Tvrdenie dokážeme v prípade, keď je O vnútorným bodom trojuholníka ABX (v ostatných prípadoch je dôkaz podobný). Označme $|\measuredangle AXO| = \alpha$ a $|\measuredangle BXO| = \beta$. Z rovnoramenných trojuholníkov AOX a BOX spočítame, že $|\measuredangle XOA| = 180^\circ - 2\alpha$ a $|\measuredangle XOB| = 180^\circ - 2\beta$. Z toho ľahko máme $|\measuredangle AOB| = 2(\alpha + \beta)$, čo sme mali dokázať.]

N2. Dokážte, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď je súčet jeho protiľahlých uhlov rovný 180°. [Ak je $ABCD$ tetivový, označme O stred kružnice jemu opísanej. Konvexný a nekonvexný uhol AOC dávajú dokopy 360°. Z vety o obvodovom a stredovom uhle máme, že tento súčet je rovný dvojnásobku súčtu veľkostí uhlov ABC a ADC – tento súčet je teda rovný 180°. Predpokladajme naopak, že súčet protiľahlých uhlov je rovný 180°. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|\measuredangle ADC| \geqq 90^\circ$. Potom $|\measuredangle ABC| \leqq 90^\circ$. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ADC. Bod O zrejme leží v polrovine ACB. Navyše ľahko vypočítame, že konvexný uhol AOC má veľkosť rovnú dvojnásobku uhla pri vrchole B. Spolu s $|OA| = |OC|$ tak máme, že O musí nutne byť stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC, takže je stredom kružnice opísanej celému štvoruholníku $ABCD$.]

N3. Dokážte, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle ADB|$. [Ak je štvoruholník $ABCD$ tetivový, tak oba tieto uhly sú rovné polovici prislúchajúceho stredového uhla AOB. Ak naopak platí uvedená rovnosť, označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Pozrime sa na bod O z pohľadu trojuholníka ABD. Máme $|OA| = |OB|$. Ďalej veľkosť uhla AOB (konvexného či nekonvexného) je rovná dvojnásobku veľkosti uhla pri D. Keďže leží v „správnej" polrovine vzhľadom na priamku AB, musí sa jednať o stred kružnice opísanej ABD, teda aj celému štvoruholníku.]

N4. Daný je ostrý uhol XAY a vnútri neho bod P. Nech P_1, P_2 sú obrazy bodu P v osovej súmernosti podľa jednotlivých ramien AX, AY uhla XAY. Dokážte, že $|\measuredangle P_1AP_2| = 2|\measuredangle XAY|$. [Označme $|\measuredangle XAP| = \alpha$ a $|\measuredangle PAY| = \beta$. Potom $|\measuredangle XAY| = \alpha+\beta$. Vďaka osovej súmernosti platí $|\measuredangle P_1AX| = \alpha$ a $|\measuredangle P_2AY| = \beta$. Je teda naozaj $|\measuredangle P_1AP_2| = 2(\alpha + \beta)$.]

D1. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech D, E, F sú postupne päty výšok na strany BC, CA, AB. Dokážte, že sa priamky AD, BE, CF pretínajú v jednom bode. [Nech

[2] `https://kms.sk/248/plugin/attachments/download/393/`, strana 37, sekcia 2.2.

H označuje priesečník priamok BE a CF. Stačí dokázať, že priamka AH je kolmá na BC. Všimnime si, že body A, F, H, E ležia na kružnici vďaka pravým uhlom pri vrcholoch E, F. To isté platí aj pre body B, C, E, F. Je teda $|\measuredangle HAE| = |\measuredangle HFE| = |\measuredangle CBE| = 90^\circ - \gamma$. Z toho už vyplýva dokazovaná kolmosť.]

D2. Označme H priesečník priamok z úlohy D1. Dokážte, že H je stredom kružnice vpísanej trojuholníku DEF. [Vďaka symetrii stačí dokázať, že DH je os vnútorného uhla EDF. Keďže DH a DB sú kolmé, stačí dokázať, že DB je os vonkajšieho uhla EDF, teda že $|\measuredangle FDB| = |\measuredangle EDC|$. Oba tieto uhly sú ale rovné α, čo je vidno z tetivových štvoruholníkov $AFDC$, resp. $AEDB$ (tie sú tetivové vďaka pravému uhlu nad tetivami AC, resp. AB).]

D3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme D pätu jeho výšky na stranu BC. Dokážte, že päty kolmíc z D na zvyšné strany a zvyšné výšky ležia na jednej priamke. [Nech P, Q, R sú postupne kolmé priemety bodu D na AB, AC a výšku z vrcholu B, ktorej pätu ešte označíme S. Štvoruholníky $BDRP$, $DQSR$, $ASDB$ sú vďaka pravým uhlom tetivové. Z nich postupne vypočítame $|\measuredangle DRP| = 180^\circ - \beta$ a $|\measuredangle DRQ| = |\measuredangle DSC| = \beta$. Body P, Q, R sú teda kolineárne. Vďaka symetrii sme hotoví.]

D4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s priesečníkom výšok H a stredom kružnice opísanej O. Dokážte, že priamky AH, AO sú súmerne združené podľa osi vnútorného uhla BAC (také dvojice priamok so spoločným bodom A sa nazývajú *izogonálne* vzhľadom na daný uhol BAC). [Ľahko vypočítame, že $|\measuredangle BAH| = 90^\circ - \beta$. Z rovnoramenného trojuholníka AOC a vety o obvodovom a stredovom uhle potom určíme, že $|\measuredangle CAO| = 90^\circ - \beta$, takže $|\measuredangle BAH| = |\measuredangle CAO|$, odkiaľ už vyplýva dokazované tvrdenie.]

D5. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Dokážte, že polpriamky izogonálne vzhľadom na uhol BAC (pozri definíciu izogonálnosti v predošlej úlohe) pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch rôznych od A, ktoré sú súmerne združené podľa osi úsečky BC. [Označme K a L priesečníky týchto priamok s kružnicou opísanou. Z definície izogonálnosti máme $|\measuredangle BAK| = |\measuredangle CAL|$, takže tetivy BK a CL majú rovnakú veľkosť, a tak body B, C, K, L tvoria rovnoramenný lichobežník, z čoho už vyplýva dokazované tvrdenie.]

---

3. *Nájdite všetky nezáporné celé čísla m, n, pre ktoré platí $|4m^2 - n^{n+1}| \leqq 3.$*

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Vzhľadom na to, že člen s n rastie oveľa rýchlejšie ako člen s m, má zmysel preskúmať najskôr malé hodnoty m.

Keď $m = 0$, je skúmaný vzťah ekvivalentný s nerovnosťou $n^{n+1} \leqq 3$. Tomu zrejme vyhovujú $n = 0$ a $n = 1$, zatiaľ čo pre $n \geqq 2$ platí $n^{n+1} \geqq 8$. Dostávame tak dve riešenia $(m, n) = (0, 0)$ a $(m, n) = (0, 1)$.

Pre $m = 1$ riešime nerovnicu $|4 - n^{n+1}| \leqq 3$. Vidíme, že $n = 0$ nevyhovuje, $n = 1$ vyhovuje a pre $n \geqq 2$ platí $|4 - n^{n+1}| = n^{n+1} - 4 \geqq 4$. Máme teda riešenie $(m, n) = (1, 1)$.

Ďalej už budeme predpokladať, že $m \geqq 2$, danú nerovnicu prepíšeme v tvare rovnice $4m^2 = n^{n+1} + a$, pričom a je (neznáme) celé číslo, ktorého absolútna hodnota neprevyšuje 3, a rozlíšime prípady $a = 0$, $|a| \in \{1, 3\}$ a $|a| = 2$.

Rozoberme najskôr prípad, keď $4m^2 = n^{n+1}$. Na ľavej strane rovnice je kladné párne číslo, ktoré je navyše druhou mocninou celého čísla. To isté musí platiť aj pre pravú stranu rovnice, takže číslo n musí byť kladné a párne: položme $n = 2k$. Potom $n^{n+1} = (2k)^{2k+1}$, a keďže exponent $2k+1$ je nepárny, bude toto číslo druhou mocninou celého čísla práve vtedy, keď jeho základ $2k$ bude druhou mocninou celého čísla, čiže $2k = r^2$, pričom r je kladné celé číslo, ktoré zjavne musí byť párne. Je preto $r = 2l$, a teda $k = 2l^2$ a $n = 2k = 4l^2$, pričom l je kladné celé číslo. Keďže m je kladné, z rovnice $4m^2 = n^{n+1}$ po vydelení štyrmi a odmocnení dostaneme

$$m = \sqrt{\frac{n^{n+1}}{4}} = \frac{\left(\sqrt{4l^2}\right)^{4l^2+1}}{2} = \frac{(2l)^{4l^2+1}}{2} = l \cdot (2l)^{4l^2}.$$

Pre každé kladné celé číslo l tak vychádza, že dvojica $(m,n) = (l(2l)^{4l^2}, 4l^2)$ je riešením úlohy.

Uvažujme teraz prípady $4m^2 = n^{n+1} \pm a$, pričom $a \in \{1,3\}$. Z faktu, že pravá strana rovnice musí byť párne číslo, vyplýva, že n^{n+1} musí byť nepárne číslo, čo znamená, že samo n je nepárne číslo. Položme $n = 2k+1$, pričom k je nezáporné celé číslo. Potom dostávame

$$4m^2 = n^{2k+2} \pm a,$$
$$(2m + n^{k+1})(2m - n^{k+1}) = \pm a.$$

Číslo $\pm a$ potrebujeme rozložiť na súčin dvoch celých čísel, ktoré v súčte dávajú $(2m + n^{k+1}) + (2m - n^{k+1}) = 4m \geqq 8$ (použili sme predpoklad $m \geqq 2$). Aspoň jedno z nich je teda väčšie ako 3, čo nemôže nastať, pretože medzi deliteľmi čísla $\pm a$ môžu byť iba čísla -3, -1, 1, 3.

Ostáva rozobrať poslednú možnosť $4m^2 = n^{n+1} \pm 2$. Z tejto rovnice vyplýva, že číslo n nie je nula a je párne, takže jeho mocnina n^{n+1} s exponentom väčším ako 1 je deliteľná štyrmi rovnako ako $4m^2$ na ľavej strane rovnice. Vidíme, že požadovaná rovnosť nemôže platiť, preto v tomto prípade žiadne riešenie nedostaneme.

Záver. Všetky riešenia úlohy sú $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ a nekonečne veľa dvojíc tvaru $(m,n) = (l(2l)^{4l^2}, 4l^2)$, pričom l je ľubovoľné prirodzené číslo.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že n^{n+1} je druhou mocninou prirodzeného čísla. [Zjavne vyhovujú všetky nepárne čísla n, lebo vtedy je exponent $n+1$ párny. Ak je n párne, je exponent $n+1$ nepárny, takže aj samo n musí byť druhou mocninou celého čísla, t. j. $n = 4k^2$ pre nejaké celé číslo k.]

N2. Nájdite všetky riešenia nerovnice $|x^2 - y^2| \leqq 2$, pričom x, y sú celé čísla. [Máme rovnicu $(x-y)(x+y) = a$, pričom $|a| \leqq 2$. Je preto buď $(x-y)(x+y) = 0$ a úlohe vyhovujú ľubovoľné dvojice (x,x) a $(x,-x)$, pričom x je celé, alebo $|x+y| = |x-y| = 1$, keďže obe čísla $x-y$, $x+y$ majú zrejme rovnakú paritu. Ľahko tak nájdeme ďalšie štyri vyhovujúce dvojice: $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$.]

D1. Dokážte, že žiadne číslo tvaru $4k+2$, pričom k je celé číslo, sa nedá zapísať ako rozdiel dvoch druhých mocnín celých čísel. [Druhé mocniny celých čísel dávajú po delení 4 zvyšky 0 a 1, rozdiel dvoch z nich teda môže dať iba zvyšok 0, 1 alebo $3 \equiv -1$.]

D2. Nájdite všetky prirodzené čísla x také, že $x^2 + x - 2$ je mocnina dvoch. [Platí $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, takže obe čísla $x-1$ a $x+2$ musia byť mocniny dvoch. Ich rozdiel je rovný 3, teda jedna z týchto mocnín musí byť nepárna. Jediná možnosť je $x - 1 = 2^0 = 1$, čiže $x = 2$, ktorá naozaj vyhovuje, lebo $x^2 + x - 2 = 4$.]

D3. Nájdite všetky prirodzené x také, že x^2+x+1 je druhou mocninou celého čísla. [Žiadne také číslo x neexistuje, lebo $x^2 < x^2 + x + 1 < (x+1)^2$.]

---

4. *Daná je množina M prirodzených čísel s n prvkami, pričom n je nepárne číslo väčšie ako jedna. Dokážte, že počet usporiadaných dvojíc (p,q) rôznych prvkov z M takých, že aritmetický priemer čísel p, q je prvkom M, je nanajvýš $\frac{1}{2}(n-1)^2$.*

(*Martin Panák, Patrik Bak*)

Riešenie. Označme $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ prvky množiny M. Zvoľme pevný index i. Ak je prvok x_i aritmetickým priemerom prvkov $x_j < x_k$, musí zrejme platiť $x_j < x_i < x_k$. Pre hodnotu j tak máme možnosti $1, \ldots, i-1$ (tých je $i-1$), zatiaľ čo pre hodnotu k máme možnosti $i+1, i+2, \ldots, n$ (tých je $n-i$). Navyše ak je x_i aritmetickým priemerom rôznych dvojíc $x_{j_1} < x_{k_1}$ a $x_{j_2} < x_{k_2}$, tak $j_1 \neq j_2$ a $k_1 \neq k_2$ (ak by napr. bolo $j_1 = j_2$, ľahko by sme dostali $k_1 = k_2$, čo je v spore s tým, že sa jedná o rôzne dvojice). Každú z možných hodnôt j či k preto môžeme vybrať nanajvýš raz, teda počet neusporiadaných dvojíc p, q rôznych čísel z M, pre ktoré platí $x_i = \frac{1}{2}(p+q)$ s daným indexom i, je nanajvýš $\min\{i-1, n-i\}$. S prihliadnutím na ich požadované usporiadanie je to potom dvojnásobok, $2\min\{i-1, n-i\}$.

Podľa zadania je $n = 2k+1$, pričom k je prirodzené číslo. Sčítaním našich odhadov pre všetky indexy $i = 1, 2, \dots, n$ dostávame, že hľadaný počet dvojíc je nanajvýš

$$\begin{aligned} &2(\min\{0, 2k\} + \min\{1, 2k-1\} + \ldots + \min\{k, k\} + \ldots + \min\{2k, 0\}) = \\ &\quad = 2(0 + 1 + \ldots + (k-1) + k + (k-1) + (k-2) + \ldots + 1 + 0) = \\ &\qquad = 2(1 + (k-1)) + 2(2 + (k-2)) + \ldots + 2((k-1) + 1) + 2k = k \cdot 2k. \end{aligned}$$

Tým pádom sme hotoví, pretože $\frac{1}{2}(n-1)^2 = 2k^2$.

Poznámky. Ak $n = 2k$, zistíme, že počet skúmaných dvojíc je nanajvýš

$$2(\min\{0, 2k-1\} + \min\{1, 2k-2\} + \ldots + \min\{2k-1, 0\}) = 2k(k-1).$$

Ľahko overíme, že jednotný vzorec pre zápis oboch prípadov je $\binom{n}{2} - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, pričom $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x.

Skúmaný odhad sa nedá všeobecne zlepšiť, ako dosvedčuje príklad množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Rovnaká množina funguje aj pre párne n (pozri poznámku 1).

V riešení sme nikde nepoužili, že v uvažovanej množine M sú prirodzené čísla. Uvedené riešenie funguje aj pre n-prvkovú množinu reálnych čísel.

Odhad počtu dvojíc z tvrdenia úlohy platí pre akúkoľvek množinu M kladných reálnych čísel aj v prípade, keď aritmetický priemer dvoch čísel p, q zameníme iným zo známych priemerov (napr. geometrickým $\sqrt{pq}$ alebo harmonickým $2pq/(p+q)$). Je možné dokazovať rovnaký odhad aj pre nesymetrické priemery, akým je napr. vážený priemer $\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q$, len počet usporiadaných dvojíc sa potom nedá počítať ako dvojnásobok počtu dvojíc neusporiadaných.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že ak $p < q$, leží aritmetický priemer čísel p a q v intervale (p, q). [Treba overiť nerovnosti $p < (p+q)/2$ a $(p+q)/2 < q$. Obe sú ekvivalentné s $p < q$.]

N2. Sú dané štyri prirodzené čísla $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Môže byť číslo x_2 aritmetickým priemerom dvoch rôznych (neusporiadaných) dvojíc z týchto čísel? [Nie. Aby bolo x_2 priemerom nejakých dvoch čísel, muselo by jedno z nich byť menšie ako x_2, zatiaľ čo druhé by bolo väčšie. Jediný kandidát na menšie číslo je x_1. Ak by ale platilo $x_2 = (x_1+x_3)/2$ a $x_2 = (x_1+x_4)/2$, mali by sme $x_3 = x_4$, čo je v spore s predpokladom.]

N3. Daná je množina čísel $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Koľko dvojíc čísel $p < q$ z tejto množiny spĺňa, že číslo $(p+q)/2$ je jedným z prvkov množiny? [Čísla 1 a 5 zrejme nie sú priemerom žiadnych dvoch čísel. Čísla 2 a 4 sú priemermi dvojíc $(1, 3)$ resp. $(3, 5)$. Napokon číslo 3 je priemerom dvojíc $(1, 5)$ a $(2, 4)$. Spolu máme štyri dvojice.]

D1. Dokážte, že pre párne n je maximálny počet dvojíc skúmaných úlohou rovný $\frac{1}{2}n(n-2)$.

D2. Pre každé prirodzené n (párne aj nepárne) nájdite príklad množiny, pre ktorú je počet skúmaných dvojíc maximálny.

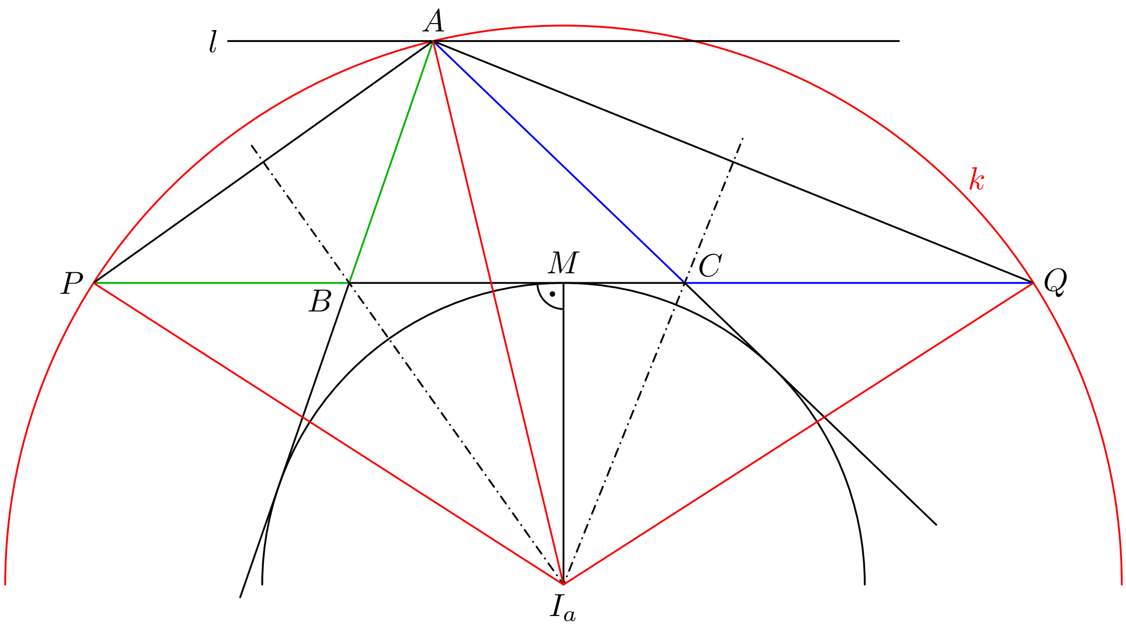
D3. Zostane tvrdenie úlohy v platnosti, aj keď namiesto množiny prirodzených čísel uvažujeme množinu reálnych čísel?

D4. Zostane tvrdenie v platnosti, aj keď nahradíme aritmetický priemer geometrickým?

5. *Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte jeho obvod o, polomer ϱ kružnice pripísanej ku strane BC a veľkosť výšky v na túto stranu. Uveďte diskusiu v závislosti od daných dĺžok.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Označme P bod ležiaci na polpriamke opačnej k polpriamke BC taký, že $|BP| = |BA|$. Analogicky označme Q bod ležiaci na polpriamke opačnej k polpriamke CB taký, že $|CQ| = |CA|$. Úsečka PQ má potom dĺžku rovnú veľkosti obvodu o trojuholníka ABC.

Ďalej označme I_a stred kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC (obr. 4). Priamka I_aB je potom osou uhla ABP. A keďže trojuholník ABP je rovnoramenný, je to zároveň os úsečky AP. Bod I_a teda leží na osi úsečky AP a podobne aj na osi úsečky AQ, čo znamená, že bod I_a je stredom kružnice opísanej trojuholníku APQ, a leží tak aj na osi jeho tretej strany PQ. Jej stred M je preto kolmým priemetom bodu I_a na PQ, a teda je zároveň aj dotykovým bodom kružnice pripísanej k strane BC.



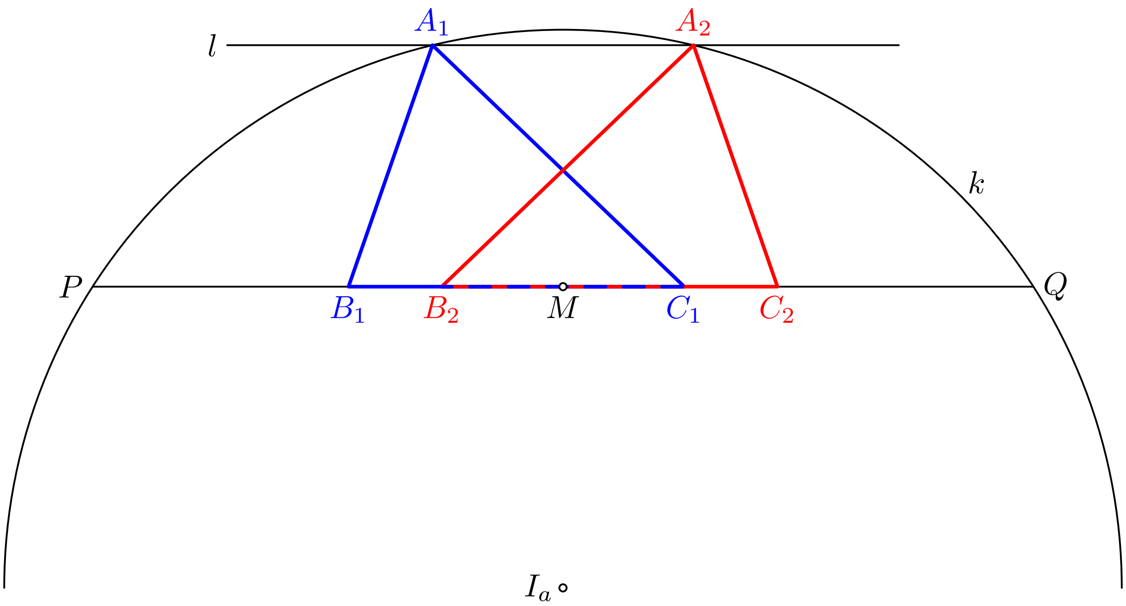
Obr. 4

Z predošlého *rozboru* už vyplýva *konštrukcia.* Najskôr zostrojíme úsečku PQ dĺžky o a jej stred M. Následne môžeme zostrojiť bod I_a, lebo $|MI_a| = \varrho$ a $MI_a \perp \perp PQ$. Potom nájdeme bod A, ktorý leží jednak na kružnici $k(I_a, |I_aP|)$ (lebo I_a je stredom kružnice opísanej trojuholníku APQ) a jednak na priamke l rovnobežnej s PQ vo vzdialenosti v, ktorá leží v polrovine opačnej k PQI_a. Pomocou nájdených bodov A dokážeme zostrojiť body B a C rôznymi spôsobmi – napríklad ako priesečníky osí úsečiek AP a AQ s úsečkou PQ. Tieto priesečníky budú pre každý zostrojený bod A existovať a budú ležať na úsečke PQ v „správnom“ poradí, keďže trojuholník APQ je tupouhlý s tupým uhlom pri vrchole A (stred I_a jeho kružnice opísanej leží v polrovine opačnej k polrovine PQA).

Teraz dokážeme, že takto zostrojené body A, B, C sú vrcholmi trojuholníka, ktorý má všetky požadované vlastnosti. Keďže body B a C ležia na osiach úsečiek AP a AQ, platí $|AB| = |PB|$ a $|CA| = |CQ|$, takže $|AB| + |BC| + |CA| = |PB| + |BC| + |CQ| = |PQ| = o$. Bod A bol nájdený na priamke l, preto z jej definície vyplýva, že vzdialenosť A od BC je naozaj v. Napokon bod I_a je stredom kružnice k opísanej trojuholníku APQ, takže leží na osiach úsečiek AP a AQ, ktoré sú ale z rovnoramennosti ABP a ACQ totožné s osami vonkajších uhlov ABC a ACB, preto I_a je naozaj stredom kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC. Navyše je I_a zostrojený tak, že jeho vzdialenosť od PQ je rovná ϱ. Zostrojený trojuholník ABC tak spĺňa podmienky zo zadania.

Ostáva spraviť *diskusiu* o počte riešení. Zaujíma nás počet vyhovujúcich trojuholníkov ABC, z ktorých žiadny nie je obrazom iného v zhodnosti, v ktorej by si ich vrcholy zodpovedali podľa písmen, ktorými sú označené. Po zostrojení bodov P, Q máme dve možné polohy pre bod I_a. Tým však budú zodpovedať zhodné riešenia súmerne združené podľa PQ, preto uvažujme iba jednu z týchto polôh. Následne určíme bod A ako priesečník kružnice k a priamky l.

Označme r polomer kružnice k ($r = |I_aP| = |I_aQ|$). Vzdialenosť bodu I_a od priamky l je rovná $\varrho + v$. Preto ak $r > \varrho + v$, dostaneme dva rôzne priesečníky A_1 a A_2. Tým zrejme budú zodpovedať dva rôzne trojuholníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ (obr. 5), ktoré budú navzájom súmerne združené podľa osi úsečky PQ, ktorou je priamka MI_a. V tom prípade má úloha dve riešenia.[3]



Obr. 5

Ak $r = \varrho + v$, bude priamka l dotyčnicou kružnice k, takže dostaneme jediný bod A a jediný vyhovujúci trojuholník ABC (ktorý zo symetrie bude navyše rovnoramenný).

Napokon ak $r < \varrho + v$, tak žiadny priesečník nedostaneme. Hodnotu r možno z pravouhlého trojuholníka PMI_a vyjadriť pomocou o a ϱ ako $\sqrt{|MI_a|^2 + |PM|^2} =$

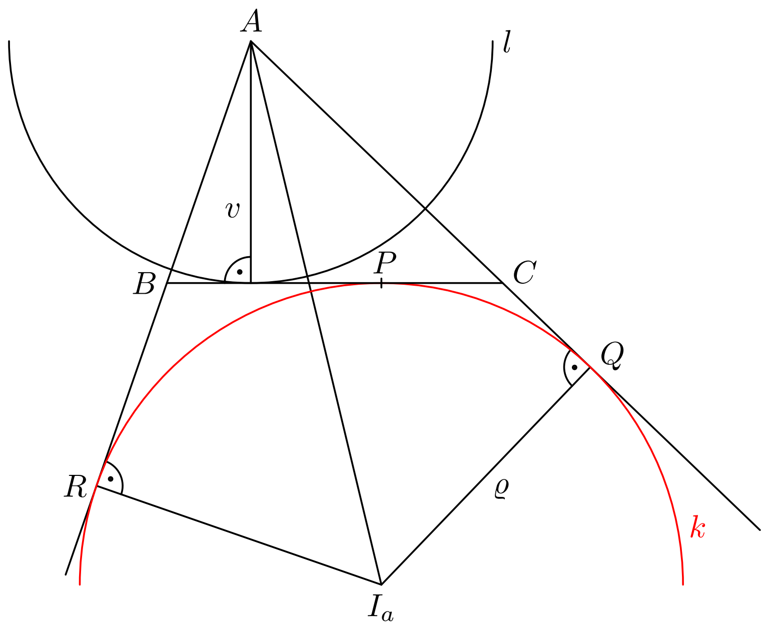
[3] Oba trojuholníky sú síce nepriamo zhodné, ale s odlišným poradím vrcholov!

$= \sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{4}o^2}$. Výsledky môžeme zhrnúť do tabuľky:

$$\begin{aligned} \sqrt{\varrho^2 + \tfrac{1}{4}o^2} &> \varrho + v\colon \quad 2 \text{ riešenia} \\ \sqrt{\varrho^2 + \tfrac{1}{4}o^2} &= \varrho + v\colon \quad 1 \text{ riešenie} \\ \sqrt{\varrho^2 + \tfrac{1}{4}o^2} &< \varrho + v\colon \quad 0 \text{ riešení} \end{aligned}$$

Poznámka. Záverečná tabuľka ukazuje, že v každom trojuholníku ABC platí nerovnosť $\sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{4}o^2} \geqq \varrho + v$. Tá sa dá po umocnení napísať do krajšieho ekvivalentného tvaru $o^2 \geqq 4v(2\varrho+v)$. Táto nerovnosť sa dá tiež dokázať pomocou známych vzťahov $v = 2S/a$, $\varrho = 2S/(b + c - a)$ a Herónovho vzorca $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, pričom S označuje obsah trojuholníka ABC. Po sérii ekvivalentných úprav totiž vyjde nerovnosť $(b - c)^2 \geqq 0$.

Iné riešenie. Označme I_a stred kružnice k pripísanej ku strane BC a P, Q, R postupne jej dotykové body s priamkami BC, CA, AB. Potom zrejme platí $|AQ| = |AR|$ a $|AR| + |AQ| = |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = |AB| + |BC| + |CA| = o$, takže obe úsečky AQ, AR majú dĺžku $\frac{1}{2}o$. Uvažujme ďalej kružnicu $l(A, v)$, ktorá sa zrejme dotýka priamky BC v päte výšky z vrcholu A. Priamka BC je tak spoločná (vnútorná) dotyčnica kružníc k a l (obr. 6). Po tomto rozbore sa môžeme hneď pustiť do opisu konštrukcie.

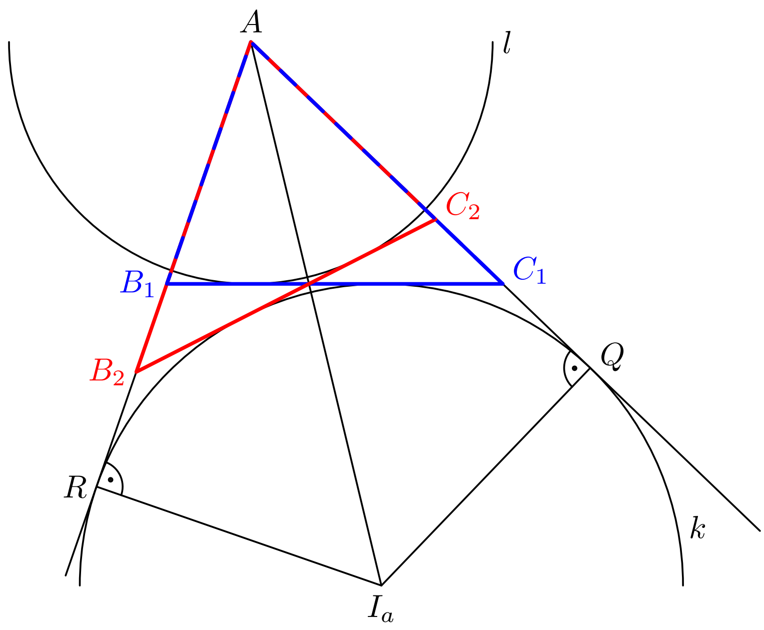


Obr. 6

Najskôr zostrojíme pravouhlý trojuholník AQI_a s pravým uhlom pri vrchole Q, v ktorom poznáme dĺžky odvesien $|AQ| = \frac{1}{2}o$ a $|QI_a| = \varrho$. Analogické vlastnosti má aj pravouhlý trojuholník ARI_a, takže ľahko zostrojíme aj bod R, napríklad ako obraz bodu Q v osovej súmernosti podľa priamky AI_a. Ďalej zostrojíme kružnice k a l. Body B a C potom nájdeme ako priesečníky úsečiek AQ a AR s ľubovoľnou zo spoločných vnútorných dotyčníc kružníc k a l (ich konštrukcia je dobre známa školská úloha).

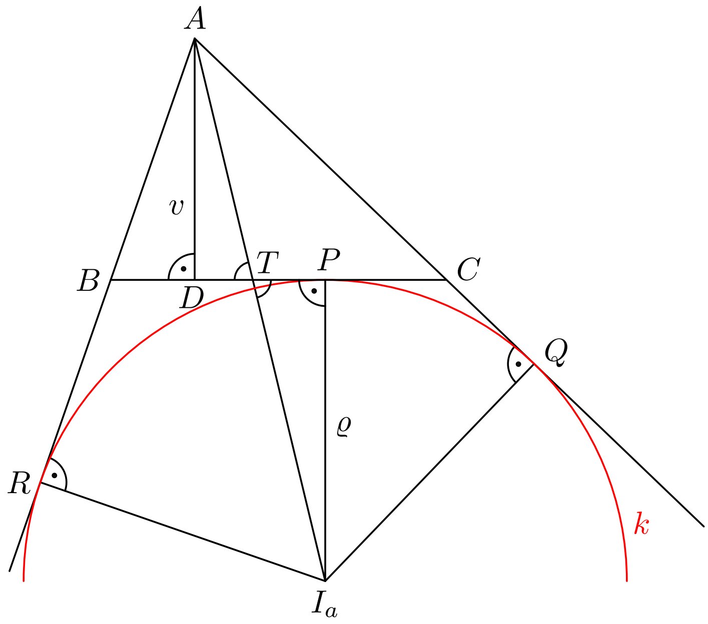
Overme, že takto zostrojený trojuholník ABC spĺňa podmienky zo zadania. Keďže sa priamka BC dotýka kružnice l (tá má stred v A), je vzdialenosť bodu A od priamky BC rovná v. Kružnica k sa zrejme dotýka všetkých troch priamok AB, BC, CA, a keďže body I_a a A ležia v opačných polrovinách vzhľadom na priamku BC, musí sa jednať o kružnicu pripísanú k strane BC (a jej polomer je tak naozaj ϱ). Napokon z úvodného výpočtu vyplýva, že obvod trojuholníka ABC je rovný dvojnásobku dĺžky úsečky AQ, teda o.

Už stačí len spraviť diskusiu o počte riešení. Trojuholník AQI_a môžeme zostrojiť vždy, bod R je potom určený jednoznačne a to isté samozrejme platí aj o kružniciach k a l. Označme $r = |AI_a|$. Ak $r > \varrho + v$, kružnice k a l nemajú spoločný bod (a zrejme žiadna z nich „neobsahuje druhú“), takže existujú práve dve spoločné vnútorné dotyčnice, ktorým zodpovedajú dvojice bodov B_1, C_1 a B_2, C_2 (obr. 7). Trojuholníky AB_1C_1 a AB_2C_2 (pri takom poradí vrcholov) zrejme nie sú zhodné, takže v tom prípade máme dve riešenia. Ak $r = \varrho + v$, tak sa kružnice k a l dotýkajú, teda existuje práve jedna vnútorná spoločná dotyčnica oboch kružníc, ktorej zodpovedá jediný vyhovujúci trojuholník ABC. Napokon ak $r < \varrho + v$, tak spoločné vnútorné dotyčnice neexistujú, a tak úloha nemá riešenie. Hodnota r je pritom z pravouhlého trojuholníka AQI_a rovná $\sqrt{|QI_a|^2 + |AQ|^2} = \sqrt{\varrho^2 + \frac{1}{4}o^2}$, takže dostávame rovnaký výsledok diskusie ako v predošlom riešení.



Obr. 7

Iné riešenie. Stručne ukážeme ešte iný spôsob, ako dokončiť predošlé riešenie. Označme T priesečník AI_a a BC a ďalej D pätu výšky z vrcholu A. Trojuholníky TAD, TI_aP sú podobné (podľa vety uu, lebo sú pravouhlé a zdieľajú vrcholový uhol, obr. 8). Platí teda $|I_aT| : |TA| = |I_aP| : |AD| = \varrho : v$. Po zostrojení štvoruholníka AQI_aR preto



Obr. 8

môžeme zostrojiť bod T ako (jediný) bod úsečky I_aA, ktorý ju delí v danom pomere z predchádzajúcej vety. Body B a C následne nájdeme ako priesečníky ktorejkoľvek z dotyčníc z bodu T ku kružnici k s úsečkami AR a AQ. Pri dôkaze správnosti konštrukcie spätne využijeme podobnosť trojuholníkov $TAD \sim TI_aP$ na dôkaz toho, že $|AD| = v$.

Diskusia o počte riešení potom závisí od polohy bodu T vzhľadom ku kružnici k. Ak označíme $r = |I_aA|$, nie je ťažké vypočítať, že $|I_aT| = \varrho \cdot r/(\varrho + v)$. Ak $|I_aT| > \varrho$, leží bod T vo vonkajšej oblasti kružnice k, takže existujú dve dotyčnice z bodu T ku k, ktoré zodpovedajú dvom riešeniam. V prípade $|I_aT| = \varrho$ je táto dotyčnica jediná, zatiaľ čo v prípade $|I_aT| < \varrho$ leží bod T vo vnútornej oblasti kružnice k, takže sa z neho dotyčnica ku k viesť nedá. Ľahko sa presvedčíme, že nájdené podmienky zodpovedajú podmienkam z predošlých riešení.

Poznámka. Bod T opísaný v tomto riešení je zrejme stredom rovnoľahlosti so záporným koeficientom, ktorá zobrazuje k na l (pričom l je kružnica z predošlého riešenia). Zostrojiť tento bod je prvým krokom jednej z možných konštrukcií spoločných vnútorných dotyčníc kružníc k a l.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Daný je trojuholník ABC. Uvažujme kružnicu pripísanú k strane BC tohto trojuholníka a označme P, Q, R dotykové body tejto kružnice s priamkami BC, CA, AB. Dokážte, že veľkosť úsečky $|AQ|$ je rovná polovici obvodu trojuholníka ABC. [Zrejme $|AQ| = |AR|$ a platí $|AR| + |AQ| = |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = |AB| + |BC| + |CA|$, odkiaľ vyplýva dokazované tvrdenie.]

N2. Dané sú dve kružnice k_1, k_2 so stredmi v bodoch O_1, O_2, ktoré nemajú spoločný bod a žiadna neleží vo vnútornej oblasti druhej. Pripomeňte si, ako zostrojiť spoločné vnútorné dotyčnice týchto kružníc. [Tieto dotyčnice sa pretínajú v strede rovnoľahlosti so záporným koeficientom, ktorá prevádza jednu kružnicu na druhú. Stačí nájsť tento stred a zostrojiť z neho dotyčnice. Stred nájdeme napríklad takto: Vezmeme body $P \in k_1$, $Q \in k_2$ také, že $PO_1 \parallel QO_2$, pričom P, Q ležia v navzájom opačných polrovinách vzhľadom na O_1O_2. Hľadaný stred rovnoľahlosti je potom priesečníkom priamok O_1O_2 a PQ. Iný postup konštrukcie spoločných vnútorných dotyčníc daných kružníc $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$ vyplýva z toho, že tieto priamky sú zrejme rovnobežné s dotyčnicami z bodu O_2 k pomocnej kružnici $k_1'(O_1, r_1 + r_2)$, ktorú ľahko zostrojíme použitím Tálesovej kružnice s priemerom O_1O_2.]

N3. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte jeho obvod, výšku na stranu BC a veľkosť uhla α. [Označme P a Q body na polpriamkach opačných k BC a CB také, že $|BP| = |BA|$ a $|CQ| = |CA|$. Z rovnoramenných trojuholníkov BAP a CAQ ľahko spočítame, že $|\measuredangle BAP| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\measuredangle CAQ| = \frac{1}{2}\gamma$. Tým pádom $|\measuredangle PAQ| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \alpha = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. V trojuholníku APQ poznáme stranu PQ, uhol pri vrchole A a tiež výšku na stranu A, takže ho vieme zostrojiť. Body B, C následne nájdeme ako priesečníky strany PQ a osí úsečiek AP a AQ.]

D1. Daný je trojuholník ABC. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CA, AB v bodoch P, Q, R. Dokážte, že $|AQ| = s - a$, pričom $a = |BC|$ a s je polovica obvodu trojuholníka ABC (ďalšie dve rovnosti analogicky). [Postupujeme podobne ako v úlohe N1. Platí $|AQ| = |AR|$ a $|AQ| + |AR| = |AB| - |BR| + |AC| - |CQ| = |AB| - |BP| + |AC| - |CP| = |AB| + |AC| - |BC|$, z čoho už vyplýva dokazované tvrdenie.]

D2. Dokážte, že v pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A je polomer kružnice vpísanej rovný $s - a$, pričom $a = |BC|$ a s je polovica obvodu ABC. [Označme I stred jeho vpísanej kružnice a P, Q dotykové body s odvesnami AB, AC. Štvoruholník $APIQ$ je štvorec, takže $|IQ| = |AP|$. Z výsledku úlohy D1 vyplýva, že $|AP| = s - a$.]

D3. Daný je trojuholník ABC. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strany BC v bode D. Kružnica pripísaná k jeho strane BC sa jej dotýka v bode E. Dokážte, že D, E sú súmerne združené podľa stredu BC. [Z úlohy D1 vieme, že $|BD| = s - b$. Ostáva dokázať, že $|CE| = s - b$. Ak označíme F dotykový bod pripísanej kružnice s priamkou AC, tak podľa úlohy N1 máme $|AF| = s$. Teda $|CE| = |CF| = |AF| - |AC| = s - b$.]

D4. Dokážte, že v dotyčnicovom štvoruholníku $ABCD$ je súčet veľkostí jeho protiľahlých strán rovnaký. [Predpokladajme, že štvoruholník je dotyčnicový, a označme postupne P, Q, R, S dotykové body vpísanej kružnice so stranami AB, BC, CD, DA. Potom $|AB| + |CD| = |AP| + |PB| + |CR| + |RD| = |AS| + |BQ| + |CQ| + |DS| = |BC| + |AD|$.]

D5. Daný je trojuholník ABC. Kružnica k jemu vpísaná sa dotýka strany BC v bode D. Nech E je obraz bodu D v stredovej súmernosti podľa stredu BC. Úsečka AE pretína kružnicu k v dvoch bodoch, označme F ten, ktorý je bližšie k bodu A. Dokážte, že $DF \perp BC$. [Podľa úlohy D3 je bod E dotykový bod kružnice l pripísanej k strane BC. Nech I_a je stred tejto kružnice a I stred k. Bod A je stredom rovnoľahlosti, ktorá zobrazuje l na k. V tejto rovnoľahlosti sa E zobrazuje na F, takže $IF \parallel I_aE$. Lenže I_aE je priamka kolmá na BC.]

---

6. *Na hracom pláne je nakreslený pravidelný n-uholník s jedným vrcholom vyznačeným ako pasca. Tom a Jerry hrajú nasledujúcu hru. Na začiatku Jerry postaví figúrku na niektorý vrchol n-uholníka. V každom kroku potom Tom povie nejaké prirodzené číslo a Jerry posunie figúrku o tento počet vrcholov podľa svojej voľby buď v smere, alebo proti smeru chodu hodinových ručičiek. Nájdite všetky $n \geqq 3$, pri ktorých môže Jerry ťahať figúrkou tak, aby nikdy neskončila v pasci. Ako sa zmení odpoveď, keď je Tom k plánu otočený chrbtom, pozná iba dané n a nevidí, kam Jerry figúrku na začiatku postaví ani kam s ňou v jednotlivých krokoch ťahá?* (Pavel Calábek)

Riešenie. Najskôr očíslujme vrcholy postupne v jednom smere $0, 1, \ldots, n-1$ tak, aby vo vrchole 0 bola pasca. Ak stojí figúrka na vrchole a a Tom povie číslo b, tak vrcholy, v ktorých po tomto ťahu môže byť figúrka, zodpovedajú zvyškom čísel $a - b$ a $a + b$ po delení číslom n – tieto zvyšky budeme označovať ako $(a - b)_n$, resp. $(a + b)_n$.

Predpokladajme najskôr, že n má nepárneho deliteľa d väčšieho ako 1. Dokážeme, že potom môže Jerry urobiť ťah figúrkou tak, aby nikdy neskončila v pasci. Jeho stratégia bude nasledujúca:

Na začiatku položí figúrku na ľubovoľný vrchol, ktorý nie je deliteľný d,[4] a ďalej

[4] Takú vlastnosť má pre ľubovoľné $d > 1$ napríklad vrchol s číslom 1.

bude vyberať smer posunu figúrky tak, aby nikdy neskončila na vrchole s číslom deliteľným d. Dokážeme, že takú možnosť má Jerry vždy, teda jeho figúrka nikdy neskončí v pasci, lebo jej číslo 0 je deliteľné d.

Ak je figúrka na vrchole s číslom a nedeliteľným d a Tom povie číslo b, tak aspoň jedno z čísel $p = (a+b)_n$ alebo $q = (a-b)_n$ nie je deliteľné d. Pre vhodné celé čísla p', q' je totiž $a+b = p'n + p$ a $a-b = q'n + q$ a sčítaním oboch rovností dostaneme $2a = n(p'+q') + (p+q)$. Ak by obe čísla p a q boli deliteľné d, bola by pravá strana poslednej rovnosti deliteľná d (d delí n), zatiaľ čo číslo $2a$ na ľavej strane deliteľné číslom d nie je (d je podľa predpokladu nepárne číslo, ktoré nedelí a). Aspoň jeden z dvoch možných Jerryho ťahov je teda taký, že sa figúrka posunie na vrchol s číslom nedeliteľným d, a tým pádom nikdy neskončí v pasci.

Ostáva teda vyšetriť prípad, keď n nemá nepárneho deliteľa, teda $n = 2^k$ pre nejaké prirodzené číslo $k \geqq 2$. Dokážeme, že v tomto prípade Tom po konečnom počte ťahov dokáže dostať figúrku do pasce.

Pre jednoduchšie vyjadrovanie budeme hovoriť, že vrchol n-uholníka, ktorý nie je pascou, má stupeň b, ak bude 2^b najvyššia mocnina čísla 2, ktorá ešte delí jeho nenulové číslo.

Teraz opíšeme Tomovu stratégiu pre $n = 2^k$, keď vidí pozíciu figúrky. Predpokladajme, že figúrka je aktuálne na vrchole stupňa p. Taký vrchol má číslo $2^p q$, pričom q je nepárne. V takom prípade Tom povie 2^p. Dokážeme, že vďaka tomu dostane figúrku buď do pasce, alebo na vrchol, ktorého stupeň bude vyšší ako p. To už Tomovi zaručí, že po konečnom počte krokov vyhrá, lebo všetky vrcholy majú čísla menšie ako $n = 2^k$, teda ich stupne sú menšie ako k, a tak sa stupeň vrcholu, kam sa figúrka posunie, nemôže stále iba zväčšovať.

Vďaka Tomovmu ťahu 2^p figúrka skončí na vrchole s číslom $r = (2^p(q \pm 1))_n$, pričom znamienko zodpovedá smeru, ktorým Jerry figúrkou ťahal. Ak $r = 0$, je figúrka v pasci. Ak $r \neq 0$, môžeme písať $2^p(q \pm 1) = nr' + r$. Číslo $q \pm 1$ je v každom prípade párne, takže ľavá strana uvedeného vzťahu je deliteľná číslom 2^{p+1}. A keďže $p \leqq k-1$, delí mocnina 2^{p+1} aj číslo $n = 2^k$, teda delí aj druhý sčítanec r z pravej strany. Keďže $r \neq 0$, znamená to, že stupeň vrcholu s číslom r je vyšší ako p. To sme potrebovali zdôvodniť.

Teraz dokážeme, že pre $n = 2^k$ dokáže Tom po konečnom počte krokov dostať figúrku do pasce bez toho, aby jej pozíciu videl. Jeho stratégia sa v predchádzajúcom prípade opierala o znalosť stupňa jej vrcholu. Aby sa tohto problému zbavil, potrebuje predovšetkým mať pre každú možnú hodnotu p stupňa jej vrcholu pripravenú stratégiu (postupnosť ťahov), ktorá mu zaručí úspech – takú postupnosť ťahov označme $S(p)$. Dohodnime sa ešte, že „ťahom b“ v týchto stratégiách nazveme Tomov krok, keď povie práve dotyčné číslo b.

Zamyslime sa teraz nad tým, ako majú vyzerať jednotlivé stratégie $S(p)$. Použijeme pritom poučenie z predošlej časti, pričom sme dokázali, že ak pri figúrke na vrchole stupňa p Tom použije ťah 2^p, prejde následne figúrka buď do pasce, alebo na vrchol stupňa vyššieho ako p.

Je jasné, že stratégia $S(k-1)$ spočíva v jedinom ťahu 2^{k-1}. Vrchol stupňa $k-1$ je totiž jediný a má číslo $\frac{1}{2}n = 2^{k-1}$, takže po ťahu 2^{k-1} sa z neho figúrka (ľubovoľným smerom) premiestni do pasce.

Podobne stratégia $S(k-2)$ začína ťahom 2^{k-2}. To Tomovi buď zaručí výhru, alebo sa figúrka dostane na vrchol s vyšším stupňom, teda nutne na vrchol stupňa $k-1$. Preto ak po ťahu 2^{k-2} Tom použije stratégiu $S(k-1)$, určite vyhrá, keďže $S(k-1)$ je z definície víťazná stratégia pre vrchol stupňa $k-1$.

Analogicky stratégia $S(k-3)$ začne ťahom 2^{k-3}. Tento ťah Tomovi buď prinesie výhru, alebo dostane figúrku na vrchol stupňa $k-1$, alebo na vrchol stupňa $k-2$. Pre obe tieto možnosti už síce má Tom stratégiu, nevie ale, ktorá z nich nastala. Kľúčové pozorovanie je však toto:

Stratégia $S(k-1)$ buď zafunguje, alebo nezmení stupeň vrcholu. Naozaj, ak je figúrka na vrchole stupňa $k-2$, t. j. na vrchole s číslom tvaru $2^{k-2}q$ (pričom q je nepárne), potom vrchol po prevedení stratégie $S(k-1)$ (obsahujúcej iba ťah 2^{k-1}) bude mať číslo $r=(2^{k-2}(q\pm 2))_n$. Z vyjadrenia $2^{k-2}(q\pm 2)=nr'+r$ totiž vidíme, že 2^{k-2} delí r (keďže delí ľavú stranu uvedeného vzťahu aj $n=2^k$), zatiaľ čo 2^{k-1} už r nedelí (lebo $q\pm 2$ je nepárne), a to znamená, že vrchol s číslom r má stupeň $k-2$.

Vďaka tomu vidíme, že po ťahu 2^{k-3}, ktorý neviedol k výhre, má vždy zmysel použiť stratégiu $S(k-1)$. Ak je figúrka na vrchole stupňa $k-1$, je víťazná. V opačnom prípade je na vrchole stupňa $k-2$, a to aj po prevedení stratégie $S(k-1)$, takže následné prevedenie stratégie $S(k-2)$ zaručí, že Tom figúrku dostane do pasce.

Uvedomme si, že naše kľúčové pozorovanie vychádza zo všeobecného faktu, že ak je figúrka na vrchole stupňa p, tak po prevedení ťahu $2^{p'}$, pričom $p'>p$, zostane figúrka na vrchole stupňa p. To dokážeme analogicky: Ak je figúrka na vrchole s číslom 2^pq, pričom q je nepárne, tak po ťahu $2^{p'}$ je na vrchole s číslom $r=(2^p(q+2^{p'-p}))_n$, platí teda $2^p(q+2^{p'-p})=nr'+r$, takže 2^p delí ľavú stranu a aj n, z čoho vyplýva, že delí aj r, avšak 2^{p+1} nedelí ľavú stranu a delí n, preto nemôže deliť r, z čoho už vyplýva, že r je číslo vrcholu stupňa p.

Teraz sme pripravení formálne opísať stratégiu $S(p)$, pričom p je dané celé číslo spĺňajúce $0\leqq p\leqq k-1$. Túto stratégiu definujeme zostupnou matematickou indukciou:

(i) $S(k-1)$ pozostáva z ťahu 2^{k-1}.

(ii) Ak celé l spĺňa $0\leqq l\leqq k-2$, definujme, že $S(l)$ pozostáva z ťahu 2^l nasledovaného ťahmi zo stratégií $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(l+1)$.

Všimnime si, že z tejto definície vyplýva, že stratégia $S(p)$ pozostáva iba z ťahov tvaru 2^t, pričom $t\geqq p$. To môžeme formálne dokázať zostupnou matematickou indukciou:

Ak $p=k-1$, je tvrdenie zrejmé. Predpokladajme, že je dané p také, že tvrdenie platí pre čísla $k-1, k-2, \ldots, p+1$. Dokážeme, že potom platí aj pre p. Stratégia $S(p)$ pozostáva z ťahu 2^p (pre ktorý dokazované tvrdenie zrejme platí), a z ťahov zo stratégií $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(p+1)$. Z indukčného predpokladu máme, že pre každé l spĺňajúce $k-1\geqq l\geqq p+1$ stratégia $S(l)$ obsahuje iba ťahy tvaru 2^t, pričom $t\geqq l$. Keďže $l\geqq p+1$, je $t\geqq p+1\geqq p$. Všetky tieto ťahy sú teda požadovaného tvaru, čo dokazuje tvrdenie pre p, čím je dôkaz indukciou ukončený.

Pripomeňme naše pozorovanie, ktoré hovorí, že ak je figúrka na vrchole stupňa p a my urobíme ťah $2^{p'}$, pričom $p'>p$, bude figúrka opäť na vrchole stupňa p. Vďaka nemu dostávame, že aplikovaním celej stratégie $S(p')$, ktorá pozostáva iba z požadovaných ťahov, sa táto skutočnosť nezmení.

Vďaka tomu vidíme, že stratégia $S(p)$ naozaj dostane figúrku do pasce, ak na začiatku stojí na vrchole stupňa p. Formálne to dokážeme zostupnou matematickou indukciou:

Pre $p=k-1$ sme to zdôvodnili už predtým. Predpokladajme, že číslo p je také, že tvrdenie platí pre čísla $k-1, k-2, \ldots, p+1$. Dokážeme, že potom platí aj pre p. Predpokladajme, že sme na vrchole stupňa p. Po aplikovaní prvého ťahu 2^p je figúrka buď v pasci, alebo sa dostane na vrchol stupňa p', pričom $p' > p$. V druhom prípade stratégie $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(p'+1)$ nezmenia fakt, že sme na vrchole stupňa p', a následne stratégia $S(p')$ z indukčného predpokladu zafunguje a dostane figúrku do pasce. Dôkaz indukciou je teda ukončený.

Posledný krok, ktorý ostáva, je definovať Tomovu finálnu stratégiu. Tá bude pozostávať z postupného prevedenia stratégií $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(0)$. Teraz už ľahko zdôvodníme, že táto postupnosť stratégií bude vždy úspešná – ak je totiž figúrka na začiatku na vrchole stupňa h, tak stratégie $S(k-1), S(k-2), \ldots, S(h+1)$ tento fakt nezmenia a následne zafunguje stratégia $S(h)$. Tým je ukončená posledná časť úlohy.

Záver. Pre n, ktoré je mocninou dvoch, má vyhrávajúcu stratégiu Tom, pričom nemusí vidieť pozíciu figúrky. Pre všetky ostatné n má vyhrávajúcu stratégiu Jerry.

Poznámka. Keby Tom okrem toho, že nevidí figúrku, nepoznal ani číslo n, tak by v prípade, že n je mocnina dvoch, mohol aj tak vyhrať v konečnom čase. Stačilo by mu skúšať postupne svoju stratégiu pre všetky mocniny dvoch.

Poznámka. Vráťme sa ešte k prípadu, keď n nie je mocnina dvoch, t. j. je tvaru $2^k l$, pričom $l > 1$ je nepárne. Z nášho riešenia vyplýva, že všetky počiatočné pozície, pre ktoré Jerryho stratégia nefunguje, sú násobky l. V týchto pozíciách naozaj vyhráva Tom, pričom nemusí vidieť pozíciu figúrky – stačí už opísanú stratégiu modifikovať tak, že všade, kde je ťah 2^a, bude ťah $2^a l$.

Iné riešenie. Ukážeme iné riešenie v prípadoch, keď Tom vidí figúrku. Úlohu si môžeme preformulovať tak, že hráme na celočíselnej osi, pričom pasce sú čísla deliteľné n (iné čísla ako celé v našom riešení neuvažujeme). Číslo nazveme *zlé*, ak existuje postupnosť ťahov, ktorá dostane na ňom stojacu figúrku do pasce, nech hrá Jerry akokoľvek. Všetky ostatné čísla nazveme *dobré*. Z definície sú všetky čísla deliteľné n zlé.

Uvedomme si, že Jerry má vyhrávajúcu stratégiu práve vtedy, keď existuje aspoň jedno dobré číslo a. V tom prípade mu stačí položiť figúrku naň. Nech už Tom povie akékoľvek číslo, je aspoň jedno z oboch čísel, na ktoré sa figúrka môže premiestniť, dobré, keďže v opačnom prípade by z definície zlého čísla platilo, že číslo a je zlé, čo je spor. Ak sú naopak všetky čísla zlé, tak z ich definície sú všetky možné pozície figúrky pre Jerryho prehrávajúce.

Ďalej platí, že ak sú dve rôzne čísla a a b zlé a číslo $(a+b)/2$ je celé, je zlé. Naozaj, ak je $(a+b)/2$ celé, majú čísla a a b rovnakú paritu, takže aj číslo $(b-a)/2$ je celé. Ťah $(b-a)/2$ dostane figúrku z čísla $(a+b)/2$ na jedno z čísel a alebo b, takže číslo $(a+b)/2$ je naozaj zlé. Naopak je ľahko vidno, že ak je číslo zlé, je to preto, že je buď deliteľné číslom n, alebo je aritmetickým priemerom dvoch zlých čísel. S týmito pozorovaniami už dokážeme opísať všetky zlé čísla.

Predpokladajme, že n má nepárneho deliteľa d väčšieho ako 1. Na začiatku sú teda všetky zlé čísla deliteľné d (keďže sa jedná o čísla deliteľné n). Ak máme dve zlé čísla a a b deliteľné d a ich aritmetický priemer je celé číslo, je aj tento priemer deliteľný d (keďže d je nepárne). Všetky zlé čísla teda musia byť deliteľné d, preto existuje nejaké dobré číslo, teda v tomto prípade má Jerry vyhrávajúcu stratégiu.

V druhom prípade je $n = 2^k$ pre nejaké prirodzené číslo k. Dokážeme, že v tomto prípade sú všetky celé čísla zlé. Použijeme na to nasledujúcu úvahu: Pre všetky celé čísla a a prirodzené čísla l platí, že ak sú krajné body intervalu $\langle a, a+2^l \rangle$ zlé, sú aj všetky čísla tohto intervalu zlé. Toto tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa l:

Pre $l = 1$ máme interval $\langle a, a+2\rangle$. Jeho jediný vnútorný bod $a+1$ je zrejme priemerom krajných bodov, ktoré sú zlé, takže aj číslo $a+1$ je zlé. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre l a všetky celé a. Dokážeme, že potom platí aj pre $l+1$. Máme dokázať, že všetky čísla intervalu $\langle a, a+2^{l+1}\rangle$ sú zlé. Keďže podľa predpokladu sú krajné body zlé, je aj stred tohto intervalu rovný $a+2^l$ zlý. Interval sa rozdelil na dva podintervaly $\langle a, a+2^l\rangle$ a $\langle a+2^l, a+2^{l+1}\rangle$. Na oba tieto intervaly však môžeme použiť indukčný predpoklad. Všetky vnútorné body týchto intervalov sú teda zlé, takže aj celý interval $\langle a, a+2^{l+1}\rangle$ je zlý. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Teraz už stačí len aplikovať toto pomocné tvrdenie na intervaly $\langle 2^k l, 2^k(l+1)\rangle$, pričom l je celé číslo. Ich krajné body sú zlé, keďže to sú násobky $n = 2^k$. Dĺžka týchto intervalov je mocnina dvoch, takže nutne všetky čísla týchto intervalov sú zlé. Týmito intervalmi ale pokrývame všetky celé čísla, teda dôkaz, že všetky celé čísla sú zlé, je hotový.

Poznámka. Stratégiu sme v tomto riešení opísali implicitne. Dá sa však spätne odvodiť. V prvom prípade stačí každej dvojici (a, b), pričom a je dobré číslo a b je ľubovoľné, priradiť taký Jerryho ťah, pri ktorom figúrka skončí na dobrom čísle. V druhom prípade treba pre každé zlé číslo zaznačiť ťah, ktorý ho dostane na zlé číslo, kvôli ktorému je zlé (uvedený ťah $(b-a)/2$ v riešení). Je vidno, že takto explicitne opísané stratégie sú rovnaké ako stratégie z predchádzajúceho riešenia.

Poznámka. Podobne ako v predošlom riešení možno aj tu pomocou predvedených úvah opísať, ako vyzerá situácia pre všetky možné počiatočné pozície figúrky. V kontexte tohto riešenia to znamená pre všeobecné n opísať všetky dobré čísla. Skombinovaním úvah z riešení sa dá dokázať, že ak $n = 2^k l$, pričom l je nepárne číslo, sú dobré *práve* tie čísla, ktoré nie sú násobkami l.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Vyriešte úlohu pre nepárne čísla n. [V tomto prípade vždy vyhráva Jerry, keďže sa nikdy neocitne na políčku, ktoré je z oboch strán rovnako vzdialené od pasce, takže vždy aspoň jeden z jeho dvoch ťahov nevedie do pasce.]

N2. Dokážte, že bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že Tom volí iba čísla nanajvýš rovné $n/2$. [V prvom rade Tomovi stačí voliť čísla nanajvýš rovné n, keďže čísla a, $a+n$ zrejme majú rovnaký efekt. Tiež je vidno, že aj čísla a, $n-a$ majú rovnaký efekt. Tomovi teda stačí voliť vždy menšie číslo z dvojice a, $n-a$. To je zrejme nanajvýš rovné $n/2$.]

N3. Vyriešte úlohu pre $n = 6$. [Očíslujme vrcholy $0, 1, \ldots, 5$ tak, že 0 je pasca. Figúrka nikdy nemôže byť na vrchole s číslom 3, keďže ťahom 3 by nutne skončila v pasci. Podľa úlohy N2 stačí predpokladať, že Tom hovorí iba čísla 1, 2, 3. Uvedomte si, že pre každý zo zvyšných vrcholov 1, 2, 4, 5 a pre každé Tomom zadané číslo 1, 2, 3 môže Jerry spraviť ťah, že figúrka neskončí na vrcholoch s číslami 3 a 6, takže nemôže prehrať.]

N4. Vyriešte úlohu pre $n = 4$. [Očíslujme vrcholy ako v úlohe N3. Rozdeľme si vrcholy, ktoré nie sú pascami, do dvoch skupín $A = \{2\}$ a $B = \{1, 3\}$. Ak je figúrka v skupine A, Tom ťahom 2 vyhrá. Ak je figúrka v skupine B, vyhrá buď ťahom 1, alebo ju dostane do skupiny A, pričom vyhrá ťahom 2. Ak by nevidel pozíciu figúrky, vyskúša najskôr ťah 2. Týmto ťahom buď vyhrá, alebo bude figúrka v skupine B, pričom zostane aj po tomto ťahu. Vtedy mu stačí použiť stratégiu pre skupinu B, t. j. povedať čísla 1, 2. Finálna stratégia v prípade, že nevidí figúrku, je teda 2, 1, 2.]

N5. Tom zvolí k danej hre (pri ktorej na hrací plán s n-uholníkom vidí) jednoduchú stratégiu: v každom kroku povie také číslo menšie ako n, pri ktorom sa následne figúrka ocitne v pasci, ak ju posunie Jerry proti smeru chodu hodinových ručičiek. Dokážte, že Tom zaručene vyhrá v prípade $n = 8$. [Vypisujte postupne polohy figúrky od víťazného konca, a dokážte, že takto dostanete všetky možné východiskové polohy figúrky. Dokážete objaviť, ktoré ďalšie n budú mať rovnakú vlastnosť?]

D1. Ako sa zmení odpoveď v úlohe, ak má Tom zakázanú konečnú množinu čísel, t. j. nesmie ich povedať? [Odpoveď sa nezmení. Ak Tom používa vo svojej stratégii zakázané číslo a, stačí ho nahradiť číslom $a + kn$ pre nejaké prirodzené k. Keďže je zakázaných konečne veľa čísel, nejaké číslo tohto tvaru zakázané nebude. Takú výmenu urobíme so všetkými zakázanými číslami, ktoré sa môžu v jeho stratégii vyskytnúť.]

D2. Ako sa zmení odpoveď, ak Tom nevidí figúrku a zároveň nepozná číslo n? [Odpoveď sa nezmení.]

D3. Ako sa zmení odpoveď v prípade, že figúrka je na začiatku položená na niektorom konkrétnom políčku?

D4. Štyri poháre sú umiestnené do rohov štvorcovej tácky. Každý je umiestnený dnom nahor alebo dnom nadol. Slepá osoba je posadená pred tácku a má za úlohu prevracať poháre tak, aby boli všetky otočené rovnakým smerom. Poháre sú prevracané nasledujúcim spôsobom: V jednom ťahu môžu byť uchopené ľubovoľné dva poháre, pričom osoba cíti ich orientáciu a môže buď niektorý z nich otočiť opačným smerom, alebo oba z nich, alebo žiadny. Následne je tácka otočená o celočíselný násobok uhla 90°. Ako má osoba postupovať pri prevracaní? [`https://en.wikipedia.org/wiki/Four_glasses_puzzle`]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018