68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

---

1. *Nájdite všetky prvočísla p, q také, že rovnica $x^2 + px + q = 0$ má aspoň jeden celočíselný koreň.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Označme x_1, x_2 nie nutne rôzne korene danej rovnice. Podľa Viètových vzorcov platí $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1x_2 = q$. Z prvého z týchto vzťahov vidíme, že ak je jeden z koreňov rovnice celočíselný, musí byť celočíselný aj ten druhý. Obe čísla x_1, x_2 sú teda celé a ich súčin je rovný prvočíslu q. To sa dá rozložiť na súčin dvoch celých čísel iba ako $q \cdot 1$ alebo $(-q) \cdot (-1)$. V prvom prípade je vzťah $x_1 + x_2 = -p$ ekvivalentný s rovnicou $p + q + 1 = 0$, v druhom s rovnicou $p - q = 1$. Prvá rovnica nemá riešenie, pretože na jej ľavej strane je kladné číslo. Druhá rovnica má jediné riešenie $(p, q) = (3, 2)$, lebo $p > q$ a prvočísla p, q majú nutne rôznu paritu, z čoho hneď vyplýva $q = 2$, a teda $p = 3$. Tejto dvojici zodpovedá rovnica $x^2 + 3x + 2 = 0$, ktorá má celočíselné korene -1 a -2. Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Skúška v tomto riešení nie je nutná. Ak totiž čísla x_1, x_2 spĺňajú vzťahy $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1x_2 = q$, je dobre známe, že sa jedná o korene rovnice $x^2 + px + q = 0$ (vyplýva to z rozkladu $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$).

Iné riešenie (č. 2). Označme a celočíselný koreň danej rovnice. Platí teda $a^2 + pa + q = 0$. Vidíme, že a delí prvé dva sčítance na ľavej strane, preto nutne delí aj q. Keďže q je prvočíslo, je $a \in \{\pm 1, \pm q\}$. Tieto štyri možnosti postupne rozoberieme:

- Pre $a = -1$ máme $p - q = 1$, takže $(p, q) = (3, 2)$.
- Pre $a = 1$ máme $p + q + 1 = 0$, čo nemôže platiť.
- Pre $a = q$ máme $q^2 + pq + q = 0$, čo po vydelení kladným q vedie na $q + p + 1 = 0$. Rovnakú rovnicu sme už dostali predtým.
- Pre $a = -q$ máme $q^2 - pq + q = 0$ a po vydelení q dostávame $p - q = 1$, čo je rovnica, ktorú sme už riešili.

Jediné možné riešenie je $(p, q) = (3, 2)$. Ľahko sa presvedčíme, že táto dvojica naozaj vyhovuje zadaniu.

Iné riešenie (č. 3). Aby mala rovnica $x^2 + px + q = 0$ celočíselný koreň, musí byť jej diskriminant $D = p^2 - 4q$ nutne druhou mocninou nezáporného celého čísla – označme ho a. Potom platí $p^2 - 4q = a^2$, čo môžeme napísať ako $(p - a)(p + a) = 4q$. Keďže $4q > 0$ a $p + a > 0$, je nutne $p - a > 0$. Číslo $4q$ je teda rozložené na súčin dvoch kladných celých čísel $p - a \leqq p + a$. Tieto dve čísla majú pritom rovnakú paritu, pretože ich súčet $2p$ je párny. Keďže aj ich súčin $4q$ je párny, sú nutne obe párne. Ak označíme $p - a = 2k$ a $p + a = 2l$, bude $0 < k \leqq l$ a $kl = q$, takže nutne $k = 1$ a $l = q$. Platí teda $p - a = 2$ a $p + a = 2q$, z čoho odvodíme rovnicu $q = p - 1$. Ďalej postupujeme ako v predošlých riešeniach.

Poznámka. Po napísaní rovnice $(p - a)(p + a) = 4q$ je možné postupovať aj priamočiarejšie: Najskôr vypíšeme všetky rozklady čísla $4q$ na súčin dvoch kladných čísel, a síce $1 \cdot 4q$, $2 \cdot 2q$, $4 \cdot q$ (v prípade $q = 2$ sú posledné dva rozklady totožné), a rozoberieme jednotlivé prípady:

- Pre rozklad $1 \cdot 4q$ máme vďaka nerovnosti $1 < 4q$ sústavu $p - a = 1$, $p + a = 4q$. Po sčítaní oboch rovníc dostávame $2p = 4q + 1$, čo nemôže nastať, lebo ľavá strana rovnice je párna, zatiaľ čo pravá je nepárna.

- ▷ Podobne pre rozklad $2 \cdot 2q$ máme z $2 < 2q$ sústavu $p - a = 2$, $p + a = 2q$, čo po sčítaní rovníc a delení dvoma vedie na známu rovnicu $p = q + 1$.
- ▷ V prípade rozkladu $4 \cdot q$ nemusíme riešiť prípad $q = 2$, keďže ten je zahrnutý v predchádzajúcom prípade. Pre $q = 3$ máme $p - a = 3$, $p + a = 4$, čo nemá celočíselné riešenie. Pre $q \geqq 5$ potom máme $p - a = 4$ a $p + a = q$, čo po sčítaní vedie na $2p = 4 + q$. Ľavá strana rovnice je párna, a teda aj pravá, takže aj prvočíslo q je párne, čo nemôže nastať, pretože sme predpokladali $q \geqq 5$.

Iné riešenie (č. 4). Označme a celočíselný koreň danej rovnice. Platí teda $a^2 + pa + q = 0$. Rozoberieme prípady podľa parity prvočísel p a q:

- ▷ Ak sú obe p, q nepárne, nemôže byť číslo a nepárne, inak by bolo $a^2 + pa + q$ nepárne. Preto je a párne, a teda $a^2 + pa$ je párne, takže nutne aj q je párne, čo je spor.
- ▷ Ak $p = 2$, dostávame rovnicu $a^2 + 2a + q = 0$, ktorú napíšeme ako $(a + 1)^2 + (q - 1) = 0$. Vidíme, že ľavá strana rovnice je kladná, preto v tomto prípade nemáme riešenie.
- ▷ Ak $q = 2$, máme $a^2 + pa + 2 = 0$. Vidíme, že a je nutne deliteľom čísla 2, čo vedie na prípady $a \in \{-1, -2, 1, 2\}$. Preskúmaním jednotlivých prípadov nájdeme jedinú možnosť $p = 3$. Skúškou sa presvedčíme, že dvojica $(p, q) = (3, 2)$ naozaj vyhovuje.

Poznámka. Toto riešenie je podobné druhému riešeniu, avšak nedostáva sa explicitne k rovniciam $p - q = 1$ resp. $p + q + 1 = 0$. Niektoré jeho časti sa dajú modifikovať tak, že sa priblíži k druhému riešeniu: Napríklad v druhom prípade možno namiesto úpravy na štvorec použiť úvahu o deliteľnosti pre nájdenie $a \in \{-1, 1, q, -q\}$, čo vedie na štyri rovnice o jednej neznámej q.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Všeobecné poznámky:

1. Pri riešení rovnice $p - q = 1$ akceptujte aj konštatovanie, že jediné dve prvočísla líšiace sa o 1 sú 2 a 3, prípadne iné ekvivalentné formulácie, ako napríklad že každé iné dve prvočísla sa líšia aspoň o 2. Neakceptujte však, ak niekto bez akéhokoľvek zdôvodnenia napíše, že z tejto rovnice nutne vyplýva $p = 3$ a $q = 2$, bez toho, že pripomenie, že sa jedná o dve prvočísla.
2. Ak sa riešiteľ nijako nezmieni o skúške, resp. spätne nevyrieši rovnicu $x^2 + 3x + 2 = 0$, strhnite bod. Ak korektným spôsobom zdôvodní, že skúška nie je nutná (čo sa dá v prvom riešení), tak bod nestrhávajte.
3. Za uhádnutie riešenia dajte 1 bod.
4. Ak riešiteľ preskúma konečne veľa dvojíc (p, q), môže dostať maximálne 1 bod (za tú dvojicu, ktorá je riešením).
5. Čiastočné body za jednotlivé riešenia sa nesčítajú.

Riešenie 1.

- ▷ [1 bod] Zapísanie oboch Viètových vzorcov.
- ▷ [1 bod] Zdôvodnenie, že oba nie nutne rôzne korene sú celočíselné.
- ▷ [1 bod] Vypísanie možností pre $\{x_1, x_2\}$ na základe vzťahu $x_1x_2 = q$.
- ▷ [1 bod] Vyšetrenie prípadu $\{x_1, x_2\} = \{q, 1\}$ vedúceho na rovnicu $p + q + 1 = 0$.
- ▷ [1 bod] Vyšetrenie prípadu $\{x_1, x_2\} = \{-q, -1\}$ vedúceho na rovnicu $p - q = 1$ (pozri prvú všeobecnú poznámku).
- ▷ [1 bod] Overenie, že dvojica $p = 3$, $q = 2$ naozaj vyhovuje (pozri druhú všeobecnú poznámku).

Neúplné riešenie: V prípade, že riešiteľ zabudne na jeden z možných rozkladov x_1x_2, dajte nanajvýš 4 body.

Riešenie 2.

- ▷ [2 body] Odvodenie, že daný celočíselný koreň je deliteľom q.
- ▷ [1 bod] Vypísanie všetkých možností pre hodnoty tohto deliteľa.
- ▷ [1 bod] Vyšetrenie prípadov $a = -1$ resp. $a = -q$ (vedúcich na rovnakú rovnicu $p - q = 1$, pozri prvú všeobecnú poznámku).

- ▷ [1 bod] Vyšetrenie prípadov $a = 1$ resp. $a = q$ (vedúcich na rovnakú rovnicu $p + q + 1 = 0$).
- ▷ [1 bod] Overenie, že dvojica $p = 3$, $q = 2$ naozaj vyhovuje (pozri druhú všeobecnú poznámku).

Neúplné riešenie: V prípade, že riešiteľ zabudne vyšetriť niektoré delitele čísla q (napríklad záporné), dajte nanajvýš 4 body.

Riešenie 3.

- ▷ [1 bod] Uvedomenie si, že diskriminant musí byť druhá mocnina celého čísla (stačí konštatovanie, alebo napísanie rovnice $p^2 - 4q = a^2$).
- ▷ [1 bod] Prepísanie skúmanej rovnice na tvar $(p - a)(p + a) = 4q$.
- ▷ [1 bod] Vypísanie všetkých možných rozkladov obmedzených prípadnými úvahami ako rozbor, ktorý z činiteľov je väčší; uvedomenie si, že stačí uvažovať kladné činitele... (pozri poznámku).
- ▷ [1 bod] Vyriešenie rozkladu $p - a = 2$, $p + a = 2q$, ktorý vedie na rovnicu $p - q = 1$ (pozri prvú všeobecnú poznámku).
- ▷ [1 bod] Vylúčenie všetkých ostatných rozkladov. Tento bod je implicitne udelený aj v prípade, keď sa riešiteľ šikovne vyhne akýmkoľvek ďalším rozkladom podobne ako vo vzorovom riešení.
- ▷ [1 bod] Overenie, že dvojica $p = 3$, $q = 2$ naozaj vyhovuje (pozri druhú všeobecnú poznámku).

Neúplné riešenie. V prípade, že riešiteľ vypíše všetky rozklady $4q$, ale nezdôvodní (alebo nekorektne vyšetrí) poradie činiteľov, strhnite nanajvýš 1 bod. Ak však neuvedie všetky rozklady $4q$, dajte nanajvýš 4 body.

Riešenie 4.

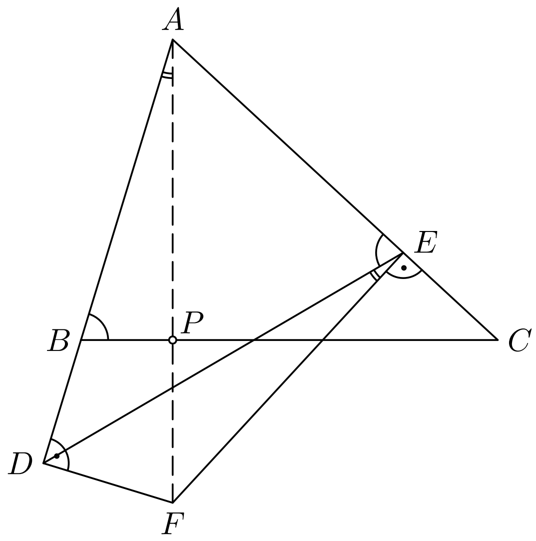
- ▷ [2 body] Úplné vyriešenie prípadu, keď p, q sú nepárne. Pri menšej chybe strhnite 1 bod.
- ▷ [1 bod] Vyriešenie prípadu $p = 2$, napr. pomocou kladnosti ako vo vzorovom riešení alebo deliteľnosti (pozri poznámku).
- ▷ [2 body] Vyriešenie prípadu $q = 2$. Za menšie chyby (napr. zabudnutie deliteľov) strhnite 1 bod.
- ▷ [1 bod] Overenie, že dvojica $p = 3$, $q = 2$ naozaj vyhovuje (pozri druhú všeobecnú poznámku).

---

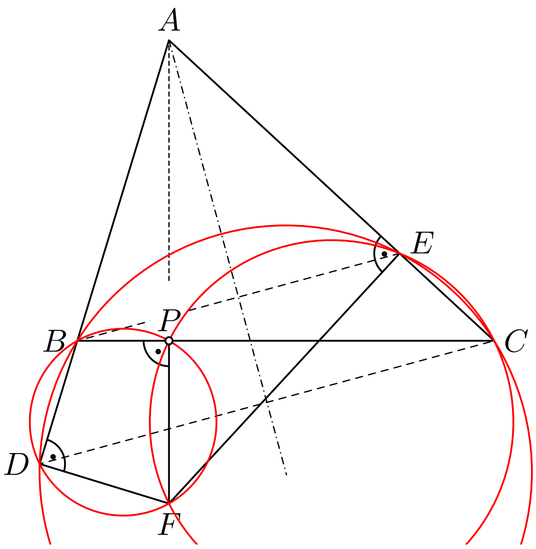
2. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom $|AB| < |AC|$. Na polpriamkach AB, AC ležia postupne body D, E také, že $|AD| = |AC|$ a $|AE| = |AB|$. Zostrojme v bode D kolmicu na AD, v bode E kolmicu na AE a ich priesečník označme F. Dokážte, že $AF \perp BC$.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Z predpokladu $|AB| < |AC|$ vyplýva, že bod D leží na polpriamke opačnej k BA, zatiaľ čo bod E leží vnútri úsečky AC. Trojuholníky ABC, AED sú zhodné podľa vety *sus*, lebo sa zhodujú v uhle pri vrchole A a $|AB| = |AE|$ a $|AC| = |AD|$, ako vyplýva z definície bodov D a E. Z tejto zhodnosti máme $|\measuredangle AED| = |\measuredangle ABC| = \beta < 90°$, pretože trojuholník ABC je podľa predpokladu ostrouhlý. To vďaka rovnosti $|\measuredangle AEF| = 90°$ znamená, že $|\measuredangle DEF| = 90° - \beta$ (obr. 1). Štvoruholník $DFEA$ je tetivový, pretože oba jeho uhly pri vrcholoch D a E sú pravé. Pre obvodové uhly nad tetivou DF tak máme $|\measuredangle DAF| = |\measuredangle DEF| = 90° - \beta$. Ak označíme P priesečník AF a BC, bude v trojuholníku ABP platiť $|\measuredangle PBA| = \beta$ a $|\measuredangle BAP| = |\measuredangle DAF| = 90° - \beta$, takže $|\measuredangle APB| = 90°$ čiže $AF \perp BC$.

Poznámka. Riešenie sa dá rôznym spôsobom modifikovať redefinovaním bodov, napr. tak, že bod F' definujeme ako priesečník kolmice z A na BC a D na AD, a pomocou uhlov dokážeme, že $AE \perp EF'$. Také redefinovanie je pri podobných úlohách často nevyhnutné – uvedené riešenie však ukazuje, že v tomto prípade to tak nie je.



Obr. 1



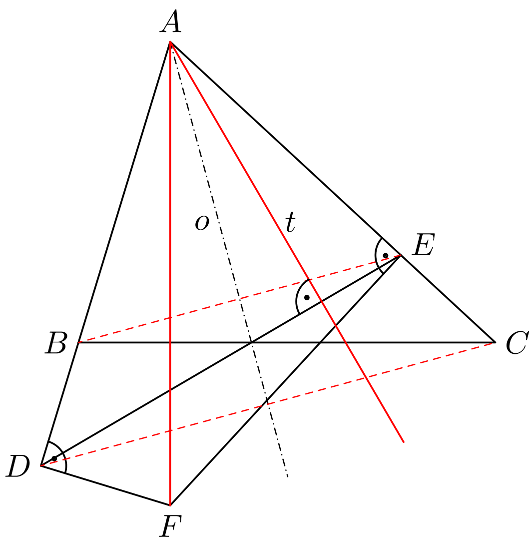
Obr. 2

Iné riešenie (č. 2). Označme P kolmý priemet bodu F na BC. Konvexné štvoruholníky $BDFP$ a $CEPF$ sú tetivové vďaka pravým uhlom pri vrcholoch D, P a E. Tetivový je aj štvoruholník $BDCE$ (obr. 2), pretože sa jedná o rovnoramenný lichobežník, a to z dôvodu, že osi jeho strán BE a CD splývajú s osou uhla BAC. Chordály dvojíc kružníc opísaných štvoruholníkom $BDFP$, $CEPF$ a $BDCE$ sú priamky BD, CE, PF, takže prechádzajú jedným bodom, čo znamená, že body A, P, F sú kolineárne, odkiaľ už vyplýva $AF \perp BC$.

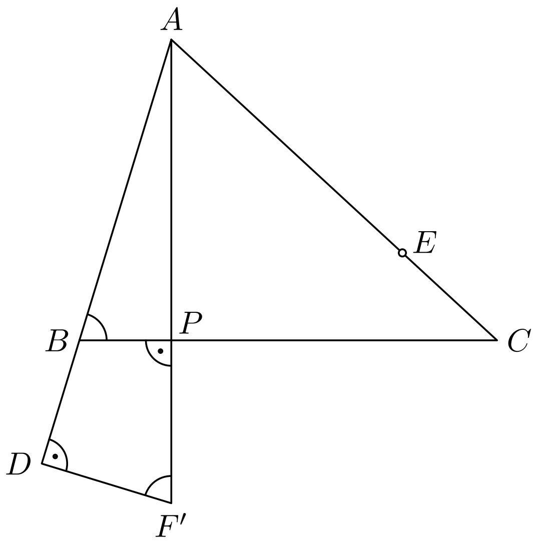
Poznámka. Aby sme sa vyhli pojmu *chordála*, môžeme uvedený postup modifikovať nasledovne: Označme P' kolmý priemet A na BC a F' priesečník AP' a kolmice z D na AD. Body B, D, F', P' ležia vďaka pravým uhlom na kružnici a na kružnici, ako už vieme, ležia aj body B, C, D, E. Pre mocnosť bodu A tak máme $|AP'| \cdot |AF'| = |AB| \cdot |AD| = |AE| \cdot |AC|$, čo znamená, že aj body P', F', E, C ležia na kružnici, takže z $|\measuredangle F'P'C| = 90^\circ$ dostávame $|\measuredangle F'EC| = 90^\circ$, odkiaľ už vyplýva $F = F'$ a $P' = P$.

Iné riešenie (č. 3). Štvoruholník $ADFE$ má pravé uhly pri vrcholoch D, E, takže jeho vrcholy ležia na kružnici s priemerom AF, ktorý teda prechádza stredom kružnice opísanej trojuholníku ADE. Označme t kolmicu na priamku DE prechádzajúcu bodom A (obr. 3). Podľa úlohy D4 k 2. úlohe domáceho kola dostávame, že priamky AF a t sú súmerne združené podľa osi o uhla BAC (sú vzhľadom k tomuto uhlu izogonálne). Priamka DE sa pritom v tejto osovej súmernosti zobrazuje na priamku CB, takže z $t \perp DE$ hneď dostávame $AF \perp BC$.

Iné riešenie (č. 4). Označme P kolmý priemet vrcholu A na stranu BC a F' priesečník polpriamky AP s kolmicou z bodu D na AD (obr. 4). V štvoruholníku $DBPF'$ sú uhly pri vrcholoch D a P pravé a $|\measuredangle DBP| = 180^\circ - \beta$, takže $|\measuredangle PF'D| = |\measuredangle AF'D| = \beta$. Z pravouhlého trojuholníka $AF'D$ tak máme $|AF'| = |AD|/\sin\beta = b/\sin\beta$. Ak definujeme F'' ako priesečník polpriamky AP s kolmicou z E na AE, dostaneme podobne $|AF''| = c/\sin\gamma$. Zo sínusovej vety pre trojuholník ABC však máme $b/\sin\beta = c/\sin\gamma$, takže $|AF'| = |AF''|$. Keďže polpriamky AF' a AF'' sú totožné, je nutne $F' = F'' = F$.



Obr. 3



Obr. 4

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Všeobecné poznámky:

1. Ak chýba slovný popis polohy bodov D a E, body nestrhávajte.
2. V prípade riešenia používajúceho analytickú geometriu dajte 6 bodov, ak je správne, a 0 bodov v prípade, že je chybné alebo nedokončené.
3. Čiastočné body za jednotlivé riešenia sa nesčítajú.

Riešenie 1.

- ▷ [1 bod] Za dôkaz zhodnosti trojuholníkov ABC a AED.
- ▷ [1 bod] Za dôkaz tetivovosti štvoruholníka $ADFE$.
- ▷ [1 bod] Za vyjadrenie veľkosti uhla DAF (či DFA) pomocou uhla β, alebo uhla EAF (či EFA) pomocou uhla γ.
- ▷ [2 body] Za využitie rovnosti obvodových uhlov v kružnici nad priemerom AF.
- ▷ [1 bod] Za dokončenie riešenia, t. j. výpočet potvrdzujúci pravý uhol pri bode P.

V prípade, že riešiteľ nanovo vymedzí bod F (pozri poznámku k 1. riešeniu), je nutné uspôsobiť schému inej definícii.

Neúplné riešenie: Dajte nanajvýš 3 body (prvé body uvedené v bodovacej schéme).

Riešenie 2.

- ▷ [1 bod] Za dôkaz, že body B, C, D, E ležia na kružnici (napr. konštatovaním, že tvoria rovnoramenný lichobežník).
- ▷ [2 body] Za dôkaz, že body D, F, P, B resp. C, F, P, E ležia na kružnici. Tieto body dajte, iba keď je jasné, že bod P je definovaný ako kolmý priemet bodu F na BC. V prípade zmienky iba jednej z týchto štvoríc dajte 1 bod.
- ▷ [3 body] Za dokončenie riešenia, t. j. použitie chordál troch kružníc.

V prípade, že riešiteľ nanovo vymedzí bod F (pozri poznámku k 2. riešeniu), je nutné uspôsobiť schému tomuto redefinovaniu.

Neúplné riešenie: Dajte nanajvýš 3 body (prvé body uvedené v bodovacej schéme).

Riešenie 3.

- ▷ [1 bod] Za tvrdenie, že body D, E sú obrazy bodov C, B v osovej súmernosti podľa o.
- ▷ [2 body] Za explicitné uvažovanie priamky t, t. j. kolmice z A na DE.
- ▷ [3 body] Za dokončenie riešenia, t. j. použitie tvrdenia o izogonálnosti AF a t v kombinácii so súmernou združenosťou priamok DE a BC.

Neúplné riešenie: Dajte nanajvýš 3 body (prvé body uvedené v bodovacej schéme).

Riešenie 4.

- ▷ [2 body] Za vyjadrenie veľkosti úsečky AF' iba pomocou prvkov trojuholníka ABC, pričom musí byť jasné, že bod F bol redefinovaný na F' a akým spôsobom.
- ▷ [4 body] Za dokončenie riešenia, t. j. ďalšie výpočty vedúce k dôkazu, že $F' = F$ (pozri vzorové riešenie).

Neúplné riešenie: Dajte nanajvýš 2 body uvedené v bodovacej schéme.

3. *Úpravou prirodzeného čísla nazveme nasledujúcu operáciu: ak je číslo párne, vydelíme ho dvoma; ak je nepárne, pripočítame k nemu číslo 3. Určte všetky prirodzené čísla, z ktorých dostaneme po niekoľkých úpravách za sebou číslo 1.* (Ján Mazák)

Riešenie. Nech $a > 1$ je prirodzené číslo. Ak je párne, dostaneme prevedením úpravy $\frac{1}{2}a$. Ak je nepárne, dostaneme po úprave $a + 3$, čo je párne číslo, takže v ďalšom kroku dostaneme $\frac{1}{2}(a + 3)$. Vďaka predpokladu $a > 1$ platí $\frac{1}{2}a < a$, a ak je $a > 3$, bude aj $\frac{1}{2}(a + 3) < a$. To dokazuje, že každé číslo $a > 1$ okrem $a = 3$ sa po nanajvýš dvoch úpravách zmenší. Z každého čísla väčšieho ako 1 teda po konečnom počte krokov dostaneme 1 alebo 3. Z čísla 1 dostaneme postupne 4, 2 a opäť 1, z čísla 3 najskôr 6 a potom opäť 3. Zhrnutím prichádzame k záveru, že k jednému z dvoch „zacyklení“ z predchádzajúcej vety nakoniec dôjde pre každé východiskové číslo $a \geqq 1$.

Ďalej si všimnime, že naša úprava zachováva deliteľnosť číslom 3. Keďže z čísla a dostávame buď $a + 3$, alebo $\frac{1}{2}a$, je číslo po úprave deliteľné tromi práve vtedy, keď je tromi deliteľné číslo pred úpravou. Z toho hneď vyplýva, že ak sme na začiatku mali číslo deliteľné tromi, tak sa táto deliteľnosť tromi zachová, takže nikdy nemôžeme dostať 1. V skutočnosti sa (podľa prvého odseku) dostaneme k číslu 3.

Ak naopak na začiatku máme číslo, ktoré tromi deliteľné nie je, tak nemôžeme dôjsť k číslu 3, preto dôjdeme k číslu 1.

Záver. Vyhovujú všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú deliteľné tromi.

Poznámka. 1. Riešenie môžeme formalizovať pomocou matematickej indukcie. Chceme dokázať, že 1 možno dostať práve z čísel nedeliteľných tromi. Najskôr tvrdenie overíme pre 2 a 3. Nech $n > 3$, budeme predpokladať, že tvrdenie platí pre všetky čísla menšie ako n. Po nanajvýš dvoch krokoch dostaneme číslo menšie ako n, ktoré je deliteľné tromi práve vtedy, keď je tromi deliteľné n, takže použitím indukčného predpokladu dôkaz dokončíme.

Poznámka. 2. Záujemcom odporúčame pozrieť sa na 1. úlohu z MMO 2017[1], ktorá sa tejto úlohe veľmi podobá.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Úplné riešenie:

- ▷ [2 body] Dôkaz, že každé číslo $a > 1$ okrem $a = 3$ sa po nanajvýš dvoch krokoch zmenší. (1)
- ▷ [1 bod] Konštatovanie, že v dôsledku (1) sa každé číslo po konečnom počte krokov zmení na 1 alebo 3. (2)
- ▷ [1 bod] Dôkaz, že úprava čísla zachováva deliteľnosť tromi, t. j. že číslo pred úpravou je deliteľné tromi práve vtedy, keď je tromi deliteľné číslo po úprave. (3) Tolerujte, ak je táto ekvivalencia zapísaná len ako implikácia.
- ▷ [1 bod] Zmienka, že v dôsledku (3) sme číslo 3 mohli získať iba z čísla deliteľného tromi. (4)
- ▷ [1 bod] Dôkaz pomocou (2) a (4), že z čísel nedeliteľných tromi vždy dostaneme 1.

Neúplné riešenie:

- ▷ Za preverenie konečného počtu čísel nedávajte žiadny bod.
- ▷ Ak riešiteľ napíše argument typu „čísla sa postupne zmenšujú“, dajte 2 body iba v prípade, keď jeho vyjadrenie explicitne obsahuje, že sa tak deje po nanajvýš dvoch krokoch – inak dajte iba 1 bod.
- ▷ Ak riešiteľ neoverí, že pre $a = 1$ dostane po dvoch krokoch opäť číslo 1, body nestrhávajte.
- ▷ Za správnu odpoveď ako nezdôvodnenú hypotézu dajte 1 bod.
- ▷ Čiastočným riešeniam, ktoré nijako nevyužívajú deliteľnosť tromi, dajte nanajvýš 3 body (ako je spomenuté v predošlých bodoch).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

[1] skmo.sk/dokument.php?id=2513

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018