68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

---

1. *Nájdite všetky osemciferné čísla také, z ktorých po vyškrtnutí niektorej štvorice susedných cifier dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2019-krát menšie.*

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. V prvej časti riešenia budeme predpokladať, že sme v hľadanom osemcifernom čísle N vyškrtli prvé štyri cifry. Tie tvoria štvorciferné číslo, ktoré označíme A. Zvyšné štyri cifry čísla N tvoria štvorciferné číslo B, ktoré je spomenuté v zadaní, pritom zrejme platí $N = 10^4A + B$. Požadovaná vlastnosť je preto vyjadrená rovnicou $10^4A + B = 2\,019B$, čiže $5\,000A = 1\,009B$. Keďže čísla 5 000 a 1 009 sú nesúdeliteľné, musí byť štvorciferné číslo B násobkom (tiež štvorciferného) čísla 5 000, ktorého dvojnásobok je už však päťciferný. Podmienke deliteľnosti tak vyhovuje jediné číslo $B = 5\,000$. Preň z rovnice $5\,000A = 1\,009B$ vychádza $A = 1\,009$, takže celkom $N = 10\,095\,000$ $(= 2\,019 \times 5\,000)$.

V druhej časti riešenia budeme uvažovať súhrnne všetky ďalšie prípady povoleného škrtania štyroch cifier osemciferného čísla N. Vtedy medzi nimi nie je jeho prvá cifra, ktorú označíme ako a. Ukážeme, že po takom škrtaní sa číslo N zmenší viac ako 5 000-krát (takže nemôže byť riešením úlohy).

Naozaj, číslo N s dekadickým zápisom $N = 10^7a + \ldots$ sa zmení (po uvažovanom škrtnutí 4 cifier) na číslo so zápisom $10^3a + \ldots$,[1] ktoré je určite menšie ako $10^3(a+1)$, pre avizované zmenšenie tak stačí dokázať nerovnosť $10^7a \geqq 5\,000 \cdot 10^3(a+1)$. Tá však platí, lebo po vydelení oboch strán číslom $5 \cdot 10^6$ prejde na nerovnosť $2a \geqq a+1$, čiže $a \geqq 1$. Stačí dodať, že prvá cifra a zápisu čísla N je vždy rôzna od nuly.

Odpoveď. Hľadané osemciferné číslo je jediné, a to 10 095 000.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky štvorciferné čísla, z ktorých po vyškrtnutí prvého dvojčíslia dostaneme dvojciferné číslo, ktoré je 69-krát menšie. [1725, 3450 a 5175. Hľadané číslo je tvaru $10^2A + B$, pričom dvojciferné čísla A, B spĺňajú rovnicu $10^2A + B = 69B$, čiže $25A = 17B$. Vďaka nesúdeliteľnosti čísel 17 a 25 z toho vyplýva, že B je násobkom čísla 25.]

N2. Dokážte, že ak v štvorcifernom čísle vyškrtneme dve z jeho posledných troch cifier, dostaneme číslo viac ako 50-krát menšie. [Pôvodné číslo je tvaru $\overline{c\star\star\star}$, zmenšené je tvaru $\overline{c\star}$, takže prvé z nich je aspoň 10^3c, zatiaľ čo druhé číslo je menšie ako $10(c+1)$. Preto stačí overiť nerovnosť $10^3c \geqq 50 \cdot 10(c+1)$, tá je ale splnená pre každé $c \geqq 1$.]

D1. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$, pre ktoré platí $\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 16 \cdot \overline{cd}$. [65–C–S–1]

D2. Určte najväčšie dvojciferné číslo k s nasledujúcou vlastnosťou: existuje prirodzené číslo N, z ktorého po škrtnutí prvej číslice zľava dostaneme číslo k-krát menšie. (Po škrtnutí číslice môže zápis čísla začínať jednou či niekoľkými nulami.) K určenému číslu k potom nájdite najmenšie vyhovujúce číslo N. [56–C–II–4]

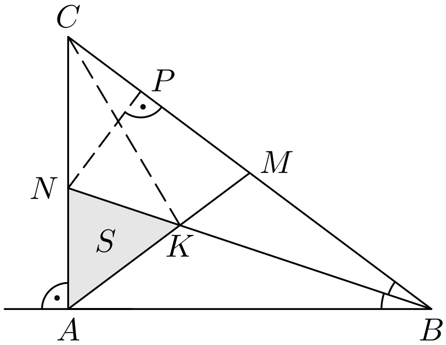
D3. Pre ktoré racionálne číslo $r > 1$ existuje najviac tých štvorciferných čísel, z ktorých vyškrtnutím prvého dvojčíslia dostaneme dvojciferné číslo, ktoré je r-krát menšie? [Pre $r = 101$. Podľa označenia z úlohy N1 hľadáme také r, pre ktoré existuje najväčší počet dvojíc A, B dvojciferných čísel spĺňajúcich rovnicu $10^2A + B = rB$, čiže $10^2A = (r-1)B$. Číslo B je pri danom r číslom A jednoznačne určené, pritom $A \in \{10, 11, \ldots, 99\}$. Z toho vyplýva, že pre každé r je vhodných čísel nanajvýš 90, pritom tento počet získame práve vtedy, keď pre každé dvojciferné A bude $B = 10^2A/(r-1)$ tiež dvojciferné celé číslo. To je splnené iba pre $r = 101$, keď $B = A$, takže všetkých 90 vyhovujúcich štvorciferných čísel je tvaru $\overline{abab}$.]

---

[1] Tri bodky znamenajú vklady nižších mocnín základu 10, v oboch prípadoch vo všeobecnosti rozdielne. Pre ďalšie úvahy nie je ich zloženie podstatné.

2. *V trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A platí $|AB| = 4$ a $|AC| = 3$. Označme M stred prepony BC a N priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole B s odvesnou AC. Úsečky AM a BN sa pretínajú v bode, ktorý označme K. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka BAK a štvoruholníka $CNKM$.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Úloha je o známom pravouhlom trojuholníku s odvesnami dĺžok 3, 4 a preponou (označenou ako BC) dĺžky 5, ktorého obsah je $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Označme ešte P pätu kolmice z bodu N na priamku BC (obr. 1). Keďže bod N leží podľa zadania na osi uhla ABC, platí $|NA| = |NP|$.



Obr. 1

V celom riešení budeme hľadať vzťahy medzi obsahmi rôznych častí trojuholníka ABC. Keďže M je stred strany BC, platia rovnosti

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 3 \quad \text{a} \quad S_{BMK} = S_{CMK},$$

lebo v oboch prípadoch sa jedná o dvojicu trojuholníkov so zhodnou výškou na zhodné základne. Porovnanie základní a výšok dvoch trojuholníkov vedie aj k úmeram

$$S_{ABN} : S_{CBN} = S_{AKN} : S_{CKN} = |AN| : |CN| = 4 : 5,$$

pretože v oboch dvojiciach sú zapísané trojuholníky so zhodnými výškami na svoje základne AN a CN, pritom trojuholníky v prvej dvojici ABN, CBN majú navyše zhodné výšky NA, resp. NP zo spoločného vrcholu N, takže pomer ich obsahov je naozaj rovný pomeru 4 : 5 dĺžok ich základní AB a CB. Zo známej hodnoty $S_{ABN} + S_{CBN} = S_{ABC} = 6$ teda vyplýva

$$S_{ABN} = \frac{8}{3} \quad \text{a} \quad S_{CBN} = \frac{10}{3}.$$

Naše riešenie založíme na výpočte neznámeho obsahu trojuholníka AKN, ktorý označíme S ako na obrázku a pre ktorý zo skôr odvodených vzťahov teraz zostavíme rovnicu. Za tým účelom postupne vyjadríme

$$\begin{aligned}
S_{ABK} &= S_{ABN} - S_{AKN} = \frac{8}{3} - S,\\
S_{BMK} &= S_{ABM} - S_{ABK} = 3 - \left(\frac{8}{3} - S\right) = S + \frac{1}{3},\\
S_{BCK} &= 2S_{BMK} = 2S + \frac{2}{3},\\
S_{CKN} &= S_{CBN} - S_{BCK} = \frac{10}{3} - \left(2S + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} - 2S.
\end{aligned}$$

Dosadením do úmery $S_{AKN} : S_{CKN} = 4 : 5$ tak dostaneme rovnicu

$$\frac{S}{\frac{8}{3} - 2S} = \frac{4}{5},$$

z ktorej vychádza $S = \frac{32}{39}$. Obsahy, ktoré máme porovnať, tak majú hodnoty

$$\begin{aligned} S_{ABK} &= S_{ABN} - S_{AKN} = \frac{8}{3} - S = \frac{72}{39}, \\ S_{CNKM} &= S_{ACM} - S_{AKN} = 3 - S = \frac{85}{39}. \end{aligned}$$

Odpoveď. Hľadaný pomer je $72 : 85$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že ľubovoľný trojuholník je každou svojou ťažnicou rozdelený na dva menšie trojuholníky s rovnakým obsahom. [Dotyčné trojuholníky majú zhodnú výšku na zhodné základne.]

N2. Dokážte, že ľubovoľný trojuholník je svojimi tromi ťažnicami rozdelený na šesť menších trojuholníkov s rovnakým obsahom. [Pre trojuholník ABC s ťažnicami AA_1, BB_1, CC_1 a ťažiskom T využite rovnosti typu $S_{ABA_1} = S_{ACA_1}$ a $S_{BTA_1} = S_{CTA_1}$, platné podľa výsledku úlohy N1.]

N3. Odvoďte pravidlo o pomere, v akom delí os vnútorného uhla daného trojuholníka jeho protiľahlú stranu: Os uhla BAC pretína stranu BC trojuholníka ABC v bode P určenom úmerou $|PB| : |PC| = |AB| : |AC|$. [Dokážte, že oba pomery majú rovnakú hodnotu ako pomer obsahov trojuholníkov ABP a ACP.]

D1. Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí $p = |ED| : : |DF| = |BE| : |EA|$.
   a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2 : 3$ rovnaký ako pre $p = 3 : 2$.
   b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4. [65–C–I–4]

D2. V pravouhlom lichobežníku $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole A základne AB je bod K priesečníkom výšky CP lichobežníka s jeho uhlopriečkou BD. Obsah štvoruholníka $APCD$ je polovicou obsahu lichobežníka $ABCD$. Určte, akú časť obsahu trojuholníka ABC zaberá trojuholník BCK. [65–C–II–3]

D3. Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD, pričom $2|AB| = 3|CD|$.
   a) Nájdite bod P vnútri lichobežníka tak, aby obsahy trojuholníkov ABP a CDP boli v pomere $3 : 1$ a aj obsahy trojuholníkov BCP a DAP boli v pomere $3 : 1$.
   b) Pre nájdený bod P určte postupný pomer obsahov trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP. [64–C–II–3]

---

3. *Úpravou prirodzeného čísla nazveme nasledujúcu operáciu: ak je číslo párne, vydelíme ho dvoma; ak je nepárne, pripočítame k nemu číslo 1.*

a) Dokážte, že z ľubovoľného prirodzeného čísla dostaneme po niekoľkých úpravách číslo 1.

b) Pre ktoré z čísel 1, 2, …, 10^6 budeme potrebovať najväčší počet úprav, kým získame číslo 1?

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Pre ilustráciu najskôr vypíšme, ako vyzerajú postupné úpravy napríklad čísla 19:

$$19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Podľa zadania sa každé párne číslo n zmení úpravou $\boxed{:2}$ na číslo $\frac{1}{2}n$, zatiaľ čo každé nepárne číslo n sa zmení úpravou $\boxed{+1}$ na číslo $n+1$, ktoré je samo párne, takže po druhej úprave $\boxed{:2}$ z pôvodného nepárneho čísla n dostaneme číslo $\frac{1}{2}(n+1)$. Všimnime si, že prvá z nerovností

$$n > \tfrac{1}{2}n, \quad \text{resp.} \quad n > \tfrac{1}{2}(n+1)$$

platí pre každé párne $n \geqq 2$ a že druhá nerovnosť platí pre každé nepárne $n \geqq 3$. Znamená to, že ak začneme opakovane upravovať ľubovoľne dané prirodzené číslo väčšie ako 1, budeme postupne (vždy po jednej alebo dvoch úpravách) dostávať menšie a menšie prirodzené čísla, takže sa po konečnom počte krokov nutne dostaneme k číslu 1. (Keby sme dostali nekonečnú postupnosť čísel napospol väčších ako 1, pre najmenšie z nich by sme sa dostali do sporu s jednou z vyššie uvedených nerovností.)

b) Pre vyriešenie úlohy s konkrétnym číslom 10^6 bude výhodné zistiť všeobecnejšie, ktoré čísla budú potrebovať (s ohľadom na svoju veľkosť) relatívne veľký počet úprav, kým sa zmenia na číslo 1. Budú to určite čísla nepárne, v ktorých sa navyše úpravy $\boxed{:2}$ nebudú pokiaľ možno opakovať za sebou (aby nedošlo k rýchlemu zníženiu hodnôt ako $20 \to 10 \to 5$ v ilustračnom príklade), budú sa teda s úpravami $\boxed{+1}$ striedať. Kandidátov s relatívne veľkým počtom potrebných úprav tak budeme nachádzať v opačne zapísanom reťazci úprav

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 10 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 17 \leftarrow 34 \leftarrow 33 \leftarrow \ldots$$

(aj predposledná úprava, rovnako ako tá posledná, musí byť $\boxed{:2}$, inak by sme dostali $1 \leftarrow 2 \leftarrow 1$). Ako sa zdá, každé z nepárnych čísel 3, 5, 9, 17, 33, …, ktoré sa v takom reťazci objavilo, je číslo tvaru 2^k+1 a číslo 1 z neho dostaneme po $2k+1$ úpravách. Pre $k=3$ sa jedná o číslo 9, z ktorého číslo 1 dostaneme po 7 úpravách, čo je, ako sa ľahko numericky preverí, najväčší počet potrebných úprav pre všetky východiskové čísla, ktoré neprevyšujú číslo $2^4=16$. To nás vedie k domnienke, ktorú teraz vyslovíme a potom dokážeme matematickou indukciou.

Pre každé prirodzené číslo k platí: Z ľubovoľného čísla $n \in \{1,2,\ldots,2^{k+1}\}$ sa dostaneme k číslu 1 po nanajvýš $2k+1$ úpravách, pritom $2k+1$ úprav budeme potrebovať pre jediné z uvedených čísel, konkrétne pre číslo $n = 2^k+1$.

Označme $M_k = \{1,2,\ldots,2^{k+1}\}$ množinu hodnôt n z uvedeného tvrdenia. Pre $k = 1$ toto tvrdenie vyplýva z reťazca $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3$, lebo $M_1 = \{1,2,3,4\}$. Ak platí dané tvrdenie pre určitú hodnotu k, bude platiť aj pre hodnotu $k+1$, keď pre novo uvažované čísla n tvoriace množinu

$$N_k = M_{k+1} \setminus M_k, \quad \text{čiže} \quad N_k = \{2^{k+1}+1, 2^{k+1}+2, \ldots, 2^{k+2}\},$$

dokážeme, že každé z nich po nanajvýš dvoch úpravách padne do množiny M_k, pritom to z nich, ktoré sa zmení na číslo 2^k+1 až po dvoch úpravách, je jedine číslo $2^{k+1}+1$.

Naozaj, ľubovoľné párne číslo $n \in N_k$ sa zmení jedinou úpravou na číslo $\frac{1}{2}n$, ktoré patrí do M_k, keďže z nerovnosti $n \leqq 2^{k+2}$ vyplýva $\frac{1}{2}n \leqq 2^{k+1}$. Ľubovoľné nepárne číslo $n \in N_k$ sa zmení po dvoch úpravách na číslo $\frac{1}{2}(n+1)$, a to patrí do M_k, keďže z nerovnosti $n \leqq 2^{k+2}-1$ vyplýva $\frac{1}{2}(n+1) \leqq 2^{k+1}$.

Číslo, ktorého úprava vedie k (nepárnemu) číslu 2^k+1, je jediné, a to párne číslo $2^{k+1}+2$. To potom možno dostať dvoma spôsobmi: jednak z čísla $2^{k+1}+1 \in N_k$ úpravou

$\boxed{+1}$, alebo úpravou $\boxed{:2}$ z čísla $2^{k+2}+4$, ktoré ale do množiny N_k nepatrí. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Teraz už ľahko získame odpoveď na stanovenú úlohu. Keďže

$$2^{19} + 1 = 524\,289 < 10^6 < 2^{20},$$

je podľa dokázaného tvrdenia hľadané číslo rovné 524 289.

Iné riešenie. Uvedieme ešte iné riešenie oboch častí, ktoré výhodne používa dvojkovú sústavu. Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 1.

Uvažujme najprv prípad, keď n je mocnina dvoch, t. j. má zápis $(100\ldots0)_2$ (takto označujeme zápis čísla v dvojkovej sústave). V každom kroku zrejme delíme dvoma, čo znamená, že odstránime poslednú nulu. To robíme, až kým nedostaneme cifru 1. Ak má číslo na začiatku k núl, v tomto prípade nastane práve k úprav.

Ak n nie je mocnina dvoch, tak dokážeme, že pre potrebný počet úprav $p(n)$ platí vzorec $p(n) = c(n) + v(n) + 1$, kde $c(n)$ je počet cifier čísla n zapísaného v dvojkovej sústave a $v(n)$ je počet „vnútorných“ núl v tomto zápise.

Tento vzťah najprv dokážeme pre prípad, keď máme číslo tvaru $n = (11\ldots1)_2$ s k jednotkami. Jeho úpravou dostaneme $m = (100\ldots0)_2$ s k nulami, preto $p(n) = p(m) + 1$. Pritom už vieme, že $p(m) = k$, takže $p(n) = k + 1$. Keďže $c(n) = k$ a $v(n) = 0$, naozaj $p(n) = c(n) + v(n) + 1$.

Zvyšné prípady vyriešime matematickou indukciou. Prípady $n = 2 = (10)_2$, $n = 3 = (11)_2$ a $n = 4 = (100)_2$ sme už vybavili. Ak $n = 5 = (101)_2$, tak ľahko overíme, že potrebujeme práve 5 krokov, a keďže $c(n) = 3$, $v(n) = 1$, naozaj $p(n) = c(n)+v(n)+1$.

Predpokladajme, že je dané číslo $n_0 \geqq 5$ také, že dokazované tvrdenie platí pre všetky $n < n_0$, ktoré nie sú mocninami dvoch. Dokážeme, že potom platí aj pre n. Rozoberieme dva prípady:

- ▷ Nech je n párne. Napíšme ho v tvare $(1a_1a_2\ldots a_k0)_2$. Po úprave dostaneme menšie číslo $m = (1a_1a_2\ldots a_k)_2$. Keďže n nie je mocnina dvoch, ani m nie je mocnina dvoch. Čísla n a m majú zrejme rovnaký počet vnútorných núl, t. j. $v(n) = v(m)$. Taktiež platí $c(n) = k+2$ a $c(m) = k+1$. Platí teda $p(n) = 1+p(m) = 1+c(m) + v(m) + 1 = 1 + (k + 1) + v(n) + 1 = c(n) + v(n) + 1$.
- ▷ Nech je n nepárne. Ak obsahuje samé jednotky, tak je to prípad, v ktorom sme už tvrdenie dokázali. Predpokladajme teda, že obsahuje aspoň jednu (vnútornú) nulu a napíšme ho v tvare $(1a_1a_2\ldots a_l011\ldots1)_2$, pričom jednotiek na konci je $k \geqq 1$. Po dvoch úpravách dostaneme

$$(1a_1a_2\ldots a_l0\underbrace{11\ldots1}_{k})_2 \to (1a_1a_2\ldots a_l1\underbrace{0\ldots0}_{k})_2 \to (1a_1a_2\ldots a_l1\underbrace{0\ldots0}_{k-1}) = m.$$

  Zrejme $c(n) = k+l+2$, $c(m) = k+l+1$ a $v(n) = 1+v(m)$. Keďže $m < n$ a nie je mocninou dvoch, môžeme naň použiť indukčný predpoklad. Platí teda $p(n) = 2 + p(m) = 2+c(m)+v(m)+1 = (k+l+2)+v(n)+1 = c(n)+v(n)+1$. Tvrdenie je tým dokázané.

Z daného vzorca okamžite vyplýva časť a). Dokonca sme našli požadovaný počet operácií. V časti b) je cieľom tento počet maximalizovať. Vezmime pevnú dĺžku k zápisu čísla n v dvojkovej sústave. Ak je n mocninou dvoch, tak potrebujeme $k-1$ operácií.

Ak nie, tak počet operácii je rovný $1 + k + v(n)$. Pritom počet vnútorných núl $v(n)$ je zrejme nanajvýš rovný $k - 2$, vtedy ide o číslo tvaru

$$(1\underbrace{0\ldots0}_{k-2}1)_2 = 2^k + 1.$$

Celkový počet operácií je v takom prípade rovný $2k - 1$. Potrebujeme teda nájsť najväčšie k také, že $2^k + 1 \leqq 10^6$. Ľahko sa presvedčíme, že je ním $k = 19$, lebo $2^{19} + 1 = 524\,289 < 10^6 < 2^{20}$. Hľadané číslo v časti b) je preto rovné 524 289.

Poznámka. Nájdený vzťah sa dá napísať viacerými spôsobmi, ktoré zahŕňajú aj prípad, keď je n mocninou dvoch. Dá sa overiť, že ekvivalentná formulácia je $p(n) = c(n-1) + o(n-1)$, kde $o(n-1)$ je počet núl v binárnom zápise čísla n. Iný spôsob je $p(n) = j(n-1) + 2 \cdot o(n-1)$, kde $j(n-1)$ je počet núl v binárnom zápise $n-1$. Na dôkaz si stačí uvedomiť vzťah medzi zápisom n a $n-1$ v dvojkovej sústave.

Návodné a doplňajúce úlohy:

Vo všetkých návodných úlohách sa zaoberáme *úpravou* zo súťažnej úlohy.

N1. Pre ktoré jednociferné číslo je nutné spraviť najväčší počet jeho úprav, kým získame číslo 1? O koľko úprav pôjde? [Číslo 9, sedem úprav.]

N2. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré je nutné spraviť 8, resp. 9 jeho úprav, kým získame číslo 1. [Číslo 18, resp. číslo 17.]

N3. Určte všetky prirodzené čísla, s ktorými je nutné spraviť päť úprav, kým získame číslo 1. [Čísla 5, 12, 14, 15 a 32. Vypisujte všetky možné postupy úprav „odzadu“, t. j. od konečného čísla 1 k východiskovému číslu. Pre daný počet piatich úprav sú tieto možnosti: $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 6 \leftarrow 5$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 6 \leftarrow 12$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 7 \leftarrow 14$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow 15$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow 32$.]

N4. Pre ľubovoľné prirodzené čísla k a p dokážte: Ak sa všetky prirodzené čísla neprevyšujúce hodnotu k zmenia po nanajvýš p úpravách na číslo 1, tak na to isté pre čísla neprevyšujúce hodnotu $2k - 1$ stačí nanajvýš $p + 2$ úprav. [Rozlíšte, či je dané číslo n, $n \leqq 2k - 1$, párne alebo nepárne – v prvom prípade stačí nanajvýš $p + 1$, v druhom nanajvýš $p + 2$ úprav.]

D1. Nech l je pevné nepárne číslo väčšie ako 1. Úpravou prirodzeného čísla nazveme nasledujúcu operáciu: ak je číslo párne, vydelíme ho dvoma; ak je nepárne, pričítame k nemu dané číslo l. Dokážte, že z ľubovoľného prirodzeného čísla dostaneme po niekoľkých úpravách číslo, ktoré neprevyšuje číslo l, pritom všetky ďalšie čísla neprevyšujú číslo $2l$ a periodicky sa opakujú. Na príklade $l = 7$ sa presvedčte, že zrejmé opakovanie $l \to 2l \to l \to \ldots$ nie je jediné možné. [Využite nasledujúce poznatky: Párne číslo sa po jednej úprave zmenší. Nepárne číslo väčšie ako l sa zmenší po dvoch úpravách. Nepárne číslo, ktoré neprevyšuje l, sa po jednej úprave zväčší na párne číslo neprevyšujúce $2l$, takže po druhej úprave sa opäť zmenší na číslo neprevyšujúce l. Čísla sa periodicky zacyklia, akonáhle sa v priebehu úprav objaví niektoré číslo po druhý raz. Pre $l = 7$ existujú okrem $7 \to 14 \to 7$ ešte dva ďalšie cykly $1 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$, $3 \to 10 \to 5 \to 12 \to 6 \to 3$ (keďže sme vypísali všetky čísla od 1 do 7, žiadne ďalšie cykly neexistujú).]

---

4. *Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu*

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$

(*Patrik Bak, Jaromír Šimša*)

Riešenie. Všimnime si na úvod, že výraz V má za daných podmienok na čísla a, b vždy zmysel, lebo rovnosť $a^2 + b^2 = 1$ vylučuje možnosť $a = b = 0$, a tak je súčet nezáporných čísel a, b rôzny od nuly (čiže kladný).

Určenie minima. Zo všeobecne platnej nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$ v našej situácii máme $2ab \leqq a^2+b^2=1$, a teda $0 \leqq ab \leqq 1/2$. Okrem toho nerovnosť $2ab \leqq 1$ spolu s rovnosťou $(a+b)^2 = 1+2ab$ vedie k odhadom $1 \leqq (a+b)^2 \leqq 2$, z ktorých po odmocnení dostaneme $1 \leqq a+b \leqq \sqrt{2}$. Preto platí

$$V = \frac{(a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 + ab + 1}{a+b} = \frac{2+ab(1-2ab)}{a+b} \geqq \frac{2}{a+b} \geqq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

pritom rovnosť $V=\sqrt{2}$ ako vidno nastane práve vtedy, keď $2ab=1$ (čiže $a=b$, ako vyplýva z úvodnej vety tohto odseku) a zároveň $a+b=\sqrt{2}$, teda jedine pre $a=b= \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Určenie maxima. Vďaka predpokladu $a^2+b^2=1$ platí

$$V = \frac{(a+b)(a^3+b^3) - ab(a^2+b^2) + ab + 1}{a+b} = \frac{(a+b)(a^3+b^3)+1}{a+b} = \\ = a^3+b^3+\frac{1}{a+b} \leqq 1 + \frac{1}{1} = 2,$$

lebo kvôli rovnosti $a^2+b^2=1$ musí platiť $0 \leqq a \leqq 1$ a $0 \leqq b \leqq 1$, odkiaľ vyplývajú odhady $a^3 \leqq a^2 \leqq a$, resp. $b^3 \leqq b^2 \leqq b$, po ktorých sčítaní dostaneme

$$a^3+b^3 \leqq a^2+b^2 \leqq a+b, \quad \text{čiže} \quad a^3+b^3 \leqq 1 \leqq a+b.$$

Rovnosť $V=2$ nastane práve vtedy, keď oba súčty a^3+b^3, $a+b$ sú (rovnako ako súčet a^2+b^2) rovné 1, teda v prípadoch, keď $\{a,b\}=\{0,1\}$.

Odpoveď. Minimálna hodnota výrazu V je $\sqrt{2}$, jeho maximálna hodnota je 2.

Iné riešenie. Ukážeme iný postup, ako dokázať nerovnosti $\sqrt{2} \leqq V \leqq 2$ (že sú obe rovnosti dosiahnuteľné, už preverovať nebudeme). Tak ako v prvom riešení využijeme rovnosť $a^2+b^2=1$ na úpravu čitateľa zadaného zlomku, konkrétne

$$a^4+b^4+ab+1 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 + ab + 1 = 2 + ab(1-2ab),$$

a dvojicu nerovností, ktoré chceme dokázať, ekvivalentne upravíme:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \leqq \frac{2+ab(1-2ab)}{a+b} &\leqq 2, \quad | \cdot (a+b), \\ \sqrt{2}(a+b) \leqq 2+ab(1-2ab) &\leqq 2(a+b), \quad |^2 \\ 2(a+b)^2 \leqq \big(2+ab(1-2ab)\big)^2 &\leqq 4(a+b)^2, \\ 2(1+2ab) \leqq \big(2+ab(1-2ab)\big)^2 &\leqq 4(1+2ab). \end{aligned}$$

Máme teda dokázať odhady $2+4ab \leqq W \leqq 4+8ab$, pričom

$$W = \big(2+ab(1-2ab)\big)^2 = 4 + 4ab(1-2ab) + a^2b^2(1-2ab)^2.$$

Dolný odhad $2+4ab \leqq W$ dostaneme, keď rovnako ako v prvom riešení odvodíme nerovnosť $2ab \leqq 1$; vďaka nej potom totiž platí $2+4ab \leqq 4 \leqq W$.

Horný odhad $W \leqq 4 + 8ab$ po dosadení rozvoja pre W ďalej ekvivalentne upravíme (za predpokladu, že obe čísla a, b sú *kladné*, inak je totiž nutne $\{a, b\} = \{0, 1\}$ a potom, ako vieme, nastáva rovnosť $V = 2$, a teda aj $W = 4$):

$$\begin{aligned} 4 + 4ab(1 - 2ab) + a^2b^2(1 - 2ab)^2 &\leqq 4 + 8ab, \quad | - 4 \\ 4ab(1 - 2ab) + a^2b^2(1 - 2ab)^2 &\leqq 8ab, \quad | : ab \\ 4(1 - 2ab) + ab(1 - 2ab)^2 &\leqq 8. \end{aligned}$$

Ľavá strana poslednej nerovnosti je však vďaka odhadom $0 < ab \leqq \frac{1}{2}$ dokonca menšia ako číslo $4 + \frac{1}{2}$. Tým je dôkaz oboch nerovností $\sqrt{2} \leqq V \leqq 2$ ukončený.

Návodné a doplňajúce úlohy:

V úlohách N1–N4 aj D1 sú a, b nezáporné čísla, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = 1$.

N1. Nájdite najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu ako súčinu ab, tak súčtu $a + b$. [$\min(ab) = 0$, $\max(ab) = 1/2$, $\min(a + b) = 1$, $\max(a + b) = \sqrt{2}$. Využite nerovnosť $(a - b)^2 \geqq 0$ a rovnosť $(a + b)^2 = 1 + 2ab$.]

N2. Dokážte, že súčet $a^4 + b^4 + ab + 1$ závisí iba od súčinu ab. [Súčet možno upraviť na tvar $2 + ab(1 - 2ab)$.]

N3. Vyjadrite, o čo sa výraz $V = (a^4 + b^4 + ab + 1)/(a + b)$ zo súťažnej úlohy líši od súčtu $a^3 + b^3$. [$V - (a^3 + b^3) = 1/(a + b)$]

N4. Dokážte rovnosť $\max(a^3 + b^3) = 1$. [Využite nerovnosti $a^3 \leqq a^2$ a $b^3 \leqq b^2$.]

D1. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu podielu $P = ab/(a + b)$. [$\max P = \sqrt{2}/4$. Využite rovnosť $2P = (a + b) - 1/(a + b)$ a fakt, že $\max(a + b) = \sqrt{2}$ (úloha N1).]

D2. Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo t platia nerovnosti

$$0 \leqq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \leqq |t - 1|. \qquad [67\text{–B–I–2}]$$

D3. Nájdite všetky kladné reálne čísla t také, že pre ľubovoľné nezáporné reálne číslo x platí nerovnosť

$$\frac{t}{x + 2} + \frac{x}{t(x + 1)} \leqq 1. \qquad [67\text{–B–II–2}]$$

D4. Určte všetky reálne čísla r také, že nerovnosť $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pre všetky dvojice reálnych čísel a, b, ktoré sú väčšie alebo rovné r. [66–B–I–6]

D5. Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla $a \leqq b \leqq c$ platí

$$(-a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 3. \qquad [66\text{–C–II–4}]$$

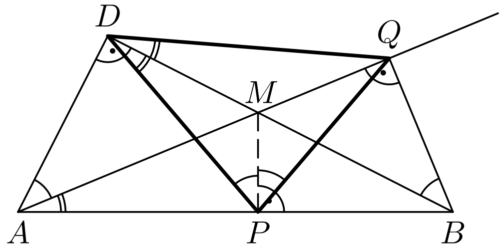
D6. Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Dokážte, že potom platí aj $c^2 + ab \leqq ac + bc$. [63–C–II–3]

D7. Nech a, b, c sú reálne čísla, ktorých súčet je 6. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $ab + bc$, $bc + ca$, $ca + ab$ nie je väčšie ako 8. [60–B–I–3]

---

5. *Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD.* (Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša)

Riešenie. Poznamenajme najskôr, že vďaka pravouhlému trojuholníku ADM je uhol BMA tupý. Uhly BAM, ABM sú teda ostré, takže kolmý priemet P bodu M padne dovnútra strany AB, zatiaľ čo kolmý priemet Q bodu B padne na polpriamku opačnú k polpriamke MA (obr. 2, v ktorom vystačíme iba s naznačenou uhlopriečkou AC, lebo vrcholu C sa dokazované tvrdenie netýka – môže ním dokonca byť aj vnútorný bod úsečky MQ). V takto upresnenej situácii objavíme vďaka Tálesovej vete hneď tri tetivové štvoruholníky: prvým je štvoruholník $ABQD$, ktorému možno opísať Tálesovu kružnicu s priemerom AB a vnútri ktorého nutne leží aj bod M, a ďalšími dvoma sú $APMD$ a $BPMQ$. V obrázku sú zároveň vyznačené zhodné obvodové uhly. Jedným oblúčikom zhodné uhly nad tetivou DQ v štvoruholníku $ABQD$ a s nimi zhodný nad tetivou DM v štvoruholníku $APMD$, ako aj druhý nad tetivou MQ v štvoruholníku $BPMQ$. Dvoma oblúčikmi potom zhodné uhly nad tetivou BQ opäť v štvoruholníku $ABQD$ a s nimi zhodný nad tetivou MP v štvoruholníku $APMD$.



Obr. 2

Výsledkom je, že v trojuholníku PQD platí $|\measuredangle DPM| = |\measuredangle QPM|$ a $|\measuredangle PDM| = |\measuredangle QDM|$, teda bod M je priesečníkom dvoch osí vnútorných uhlov trojuholníka PQD, čo je vlastnosť, ktorú má práve stred jeho vpísanej kružnice.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pripomeňte si Tálesovu vetu a všeobecnejší poznatok o obvodových a stredových uhloch v danej kružnici.

N2. V súťažnej úlohe objavte tri štvorice pomenovaných bodov, ktoré ležia vždy na jednej kružnici.

D1. V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD. Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou majúcou priemer AD. Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD. [57–B–II–3]

D2. Daný je štvorec $ABCD$. Na kratšom oblúku AB jemu opísanej kružnice zvolíme bod X. Priesečník úsečky XC so stranou AB označme Y a priesečník úsečky XD s uhlopriečkou AC označme Z. Dokážte, že $YZ \perp AC$. [Nájdite skrytú štvoricu bodov, ktoré ležia na jednej kružnici.]

D3. Pomocou počítania veľkostí uhlov dokážte, že výšky v ostrouhlom trojuholníku ABC sa pretínajú v jednom bode. [Označme postupne D a E päty výšok z vrcholov A a B, ďalej P priesečník úsečiek AD a BE a X priesečník CP a AB. Dokážeme, že priamka CP je kolmá na AB. Štvoruholníky $ABDE$ a $CDPE$ sú tetivové, pretože ich vrcholy ležia na Tálesových kružniciach s priemermi AB a CP. Preto uhly BAD, BED, PCD majú všetky rovnakú veľkosť $90° - |\measuredangle ABC|$. Uhol CXB, ktorý dopočítame zo známych veľkostí zvyšných uhlov v trojuholníku CXB, je teda pravý.]

---

6. *Konečnú množinu prirodzených čísel nazveme pekná, ak na výpis týchto čísel v desiatkovej sústave potrebujeme párny počet každej zo zastúpených cifier. Peknými množinami sú napríklad* $\{11, 13, 31\}$, $\{10, 100, 110\}$ *a tiež prázdna množina. Určte, koľko je všetkých pekných podmnožín množiny* $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$. (*Patrik Bak*)

Riešenie. Množinu $M = \{1, 2, \ldots, 2\,018\}$ zo zadania rozdelíme na dve časti

$$A = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}, \quad B = \{11, 12, \ldots, 2\,018\}$$

a ukážeme, že hľadaný počet všetkých pekných podmnožín množiny M je rovný počtu *všetkých* podmnožín množiny B (vrátane prázdnej množiny). Keďže množina B má

$2\,018 - 10 = 2\,008$ prvkov, bude tento počet rovný číslu $2^{2\,008}$, lebo všeobecne každá n-prvková množina má práve 2^n podmnožín (stačí uplatniť pravidlo súčinu na skutočnosť, že pre každý z n prvkov máme dve možnosti: buď ho do konštruovanej podmnožiny zahrnúť, alebo nie).

Úvodné tvrdenie overíme, keď ukážeme, že každá pekná podmnožina P danej množiny M je jednoznačne určená svojou časťou ležiacou v B, teda množinou $Q = P \cap B$, a že naopak ku každej množine $Q \subseteq B$ sa nájde pekná množina $P \subseteq M$, pre ktorú $Q = P \cap B$. Bude to znamenať, že medzi množinou všetkých pekných podmnožín M a množinou všetkých podmnožín B existuje bijekcia (navzájom jednoznačné zobrazenie), takže obe množiny majú rovnaký počet prvkov.

Opíšme teda, ako možno ktorúkoľvek pevne zvolenú peknú množinu $P \subseteq M$ jednoznačne rekonštruovať podľa jej časti $Q = P \cap B$, t. j. určiť jej druhú časť $P \cap A$. Inými slovami, podľa známej množiny Q máme rozhodnúť, ktoré z najmenších čísel tvoriacich množinu A do peknej množiny P patrí a ktoré nie. Jednoducho to zistíme pre každú z cifier $c \in \{2, 3, \dots, 9\}$: keďže počet výskytov cifry c v zápise všetkých čísel z P je párny, číslo c do P patrí práve vtedy, keď je počet cifier c v zápise všetkých čísel z časti Q nepárny (lebo uvedené dva počty sa môžu líšiť nanajvýš o 1). Rovnakou úvahou o počte núl môžeme rozhodnúť, či do množiny P patrí číslo 10. Majúc túto informáciu o čísle 10, môžeme učiniť (podľa počtu jednotiek) aj posledné rozhodnutie, a to či v P leží číslo 1. Tým je rekonštrukcia celej množiny P hotová.

Postup z predchádzajúceho odseku môžeme zrejme celý úspešne uplatniť na *ľubovoľnej* podmnožine Q množiny B (bez toho, aby sme dopredu vedeli, že dotyčná pekná množina P existuje, takže namiesto o rekonštrukciu pôjde o jej konštrukciu). Zostavíme tak peknú množinu $P \subseteq M$, ktorá vznikne z množiny Q pridaním niektorých (vyššie presne určených) čísel z A a pre ktorú bude platiť rovnosť $Q = P \cap B$, ako sme si želali. Tým je riešenie celej úlohy ukončené.

Odpoveď. Hľadaný počet pekných podmnožín je 2^{2008}.

Návodné a doplňajúce úlohy:

Vo všetkých úlohách sa jedná o pekné množiny v zmysle súťažnej úlohy.

N1. Neznáma pekná množina P obsahuje práve tieto viacciferné čísla: 13, 21, 34, 55, 89. Nájdite všetky jednociferné čísla, ktoré patria do P. [Práve čísla 2, 4, 8 a 9, každá z ostatných cifier je totiž v daných piatich dvojciferných číslach zastúpená v párnom počte exemplárov.]

N2. Koľko pekných podmnožín má množina

$$\{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}?$$

[$4^3 = 64$. Každá z troch daných trojíc čísel $\overline{c}, \overline{cc}, \overline{ccc}$ má v peknej množine štyri možné zastúpenia: $\emptyset$, $\{\overline{cc}\}$, $\{\overline{c}, \overline{ccc}\}$ alebo $\{\overline{c}, \overline{cc}, \overline{ccc}\}$. Iné riešenie: každá z dotyčných pekných množín je určená svojimi viacifernými číslami, ktoré môžu spolu vytvoriť ľubovoľnú z 2^6 podmnožín množiny $\{11, 22, 33, 111, 222, 333\}$.]

N3. Ktorými konečnými množinami Q viacciferných čísel môžeme nahradiť množinu $\{13, 21, 34, 55, 89\}$ v zadaní N1 tak, aby úloha mala riešenie? [V zápisoch všetkých čísel z Q musí byť cifra 0 zastúpená v párnom počte, a to je jediná podmienka na Q, lebo podľa parít počtov zastúpení ostatných cifier 1 až 9 potom určíme, ktoré z čísel 1 až 9 do uvedenej peknej množiny budú patriť a ktoré nie.]

N4. Koľko pekných podmnožín má množina

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}?$$

[32. Dvojciferné čísla z každej dotyčnej peknej množiny môžu tvoriť ľubovoľnú z 2^5 podmnožín päťprvkovej množiny $\{11, 13, 15, 17, 19\}$.]

N5. Koľko pekných podmnožín má množina

$$\{1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30\}?$$

[256. Čísla *väčšie ako* 10 z každej dotyčnej peknej množiny môžu tvoriť ľubovoľnú z 2^8 podmnožín osemprvkovej množiny

$$\{11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30\}.$$

(Číslo 10 bude patriť do peknej podmnožiny vtedy a len vtedy, keď tam bude patriť práve jedno z čísel 20 a 30.)]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Patrik Bak, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018