68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

1. *Neznáme číslo je deliteľné práve štyrmi číslami z množiny* $\{6, 15, 20, 21, 70\}$*. Určte, ktorými.* (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Ak by medzi hľadanými štyrmi číslami boli súčasne čísla 20 aj 21, bolo by neznáme číslo násobkom troch, štyroch, piatich a siedmich, a teda by bolo deliteľné aj číslami 6, 15, 70, čo odporuje požiadavkám úlohy. Do hľadanej štvorice tak jedno z čísel 20, 21 nepatrí, a preto tam patria všetky tri čísla 6, 15, 70. Každý spoločný násobok čísel 6 a 70 je deliteľný ako tromi, tak siedmimi, a teda aj číslom 21. Preto je štvrtým hľadaným číslom číslo 21.

Hľadanými štyrmi číslami sú čísla 6, 15, 21, 70. Ich najmenší spoločný násobok je 210, čo je číslo, ktoré nie je deliteľné zvyšným číslom 20. (Neznámym číslom tak môže byť aj ľubovoľný násobok $210l$, pričom l je nepárne.) Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Úlohu možno riešiť systematicky tak, že najskôr vypíšeme všetkých päť štvorprvkových podmnožín, teda množiny

$$A = \{15, 20, 21, 70\}, \quad B = \{6, 20, 21, 70\}, \quad C = \{6, 15, 21, 70\},$$
$$D = \{6, 15, 20, 70\}, \quad E = \{6, 15, 20, 21\},$$

a zistíme, ktorá z nich môže spĺňať podmienky úlohy, teda že existuje číslo N, medzi ktorého delitele patria všetky štyri prvky uvažovanej množiny, zatiaľ čo vynechané piate číslo jeho deliteľom nie je. Tak všetky množiny okrem C postupne vylúčime, napríklad množinu A: ak je N deliteľné oboma číslami $15 = 3 \cdot 5$ a $20 = 2 \cdot 10$, je deliteľné aj číslom $2 \cdot 3 = 6$, teda $6 \in A$, a to je spor. Podobne dôjdeme k sporom $15 \in B$, $21 \in D$ a $70 \in E$.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Určte päť prirodzených čísel, ktorých súčet je 20 a ktorých súčin je 420. [Keďže $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1+4+3+5+7 = 20$ a hľadané čísla, ktoré sú násobkami 5 a 7, musia byť jednociferné (súčet ostatných troch čísel je aspoň 6), sú dve z hľadaných čísel priamo čísla 5 a 7 a zvyšné tri (nie nutne rôzne) ležia v množine $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, pritom ich súčet je 8 a súčin 12, takže sa jedná o trojicu 1, 3, 4.]

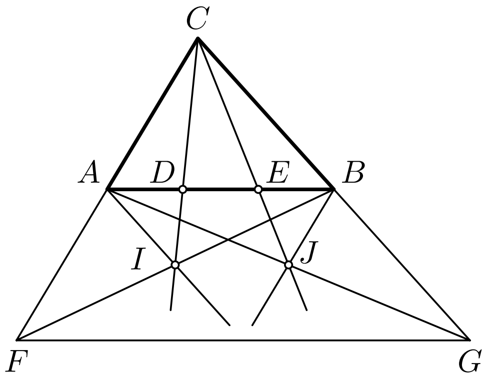
N2. Isté prirodzené číslo má práve štyri delitele, ktorých súčet je 176. Určte toto číslo, ak viete, že súčet všetkých jeho cifier je 12. [Hľadané číslo n je deliteľné tromi a väčšie ako 9, preto jeho štyrmi deliteľmi sú práve čísla $1 < 3 < n/3 < n$. Z toho vychádza $n = 129$.]

D1. Dané celé číslo je deliteľné aspoň štyrmi číslami z množiny $\{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$. Dokážte, že je deliteľné každým z nich. [Všimnime si, že $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ a $15 = 3 \cdot 5$. Teda ak je dotyčné číslo deliteľné všetkými tromi číslami 2, 3 a 5, je deliteľné aj všetkými zvyšnými číslami 6, 10 a 15. V opačnom prípade by bolo deliteľné nanajvýš dvoma z čísel 2, 3 a 5, a preto aspoň dvoma z čísel 6, 10 a 15, a teda aj každým z prvočísel 2, 3 a 5, a to je spor.]

---

2. *Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B sú postupne stredmi úsečiek CF a CG. Priamka CD pretína priamku FB v bode I a priamka CE pretína priamku AG v bode J. Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Rovnosť $|AD| = |DE|$ znamená, že bod D je stred úsečky AE. Rovnako je bod E stredom BD, a keďže body D a E ležia vnútri úsečky AB, delia ju na tretiny (obr. 1).



Obr. 1

Vzhľadom na to, že bod D delí ťažnicu BA trojuholníka BCF v dvoch tretinách, je jeho ťažiskom. Úsečka CI je teda ťažnicou trojuholníka BCF a bod I je stredom jeho strany BF. Úsečka AI je teda strednou priečkou trojuholníka BCF, čiže $AI \parallel BC$, a preto priamka AI prechádza stredom strany FG trojuholníka CFG.

Podobne vidíme, že bod E je ťažiskom trojuholníka CAG, takže CJ je jeho ťažnicou a J je stredom jeho strany AG, a preto aj priamka BJ rovnobežná s FC prechádza stredom úsečky FG. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech K, L, M, N sú postupne stredy strán AB, BC, CD, DA štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník (tzv. *Varignonov* rovnobežník). [Využite vlastnosti strednej priečky v trojuholníku: úsečky KL a MN sú strednými priečkami postupne v trojuholníkoch ABC a CDA.]

N2. Nech D je stred strany AB trojuholníka ABC a E bod jeho strany AC, pre ktorý platí $|AE| = 2|CE|$. Označme F priesečník priamok BE a CD. Dokážte, že platí $|BE| = 4|EF|$. [Označme M stred úsečky AE. Úsečka EF je strednou priečkou v trojuholníku CMD a úsečka MD je strednou priečkou v trojuholníku ABE.]

D1. Nech E, F sú postupne stredy strán AB, CD konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že platí $|BC| + |AD| \geqq 2|EF|$. [Uvažujte stred M uhlopriečky AC a úsečky EM a FM, ktoré sú strednými priečkami v trojuholníkoch ABC a ACD.]

---

3. *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 3, a každé z nich je nanajvýš 2. Dokážte, že platí nerovnosť*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Pre uvažované kladné reálne čísla a, b, c vzhľadom na predpoklady úlohy platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = 3^2 = 9.$$

Stačí teda dokázať, že je splnená nerovnosť $2ab + 2bc + 2ca > 3abc$. Tá je však ekvivalentná s nerovnosťou

$$ab(2 - c) + bc(2 - a) + ca(2 - b) > 0,$$

ktorá evidentne platí pre všetky kladné reálne čísla a, b, c, ktoré nie sú väčšie ako 2 a zároveň nemôžu byť (vzhľadom na podmienku $a + b + c = 3$) všetky rovné 2. Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka. Keďže žiadne z daných kladných čísel a, b, c neprevyšuje číslo 2, platia zrejme nerovnosti $a^2 \leqq 2a$, $b^2 \leqq 2b$ a $c^2 \leqq 2c$. Ich sčítaním dostaneme nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqq 2(a + b + c) = 2 \cdot 3 = 6,$$

pritom rovnosť je vylúčená, lebo by muselo platiť $a = b = c = 2$, čo odporuje predpokladu $a + b + c = 3$. Preto na dôkaz nerovnosti zo záveru súťažnej úlohy stačí overiť odhad $3abc \leqq 9 - 6$, čiže $abc \leqq 1$, ktorý je však okamžitým dôsledkom nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom

$$\sqrt[3]{abc} \leqq \frac{a + b + c}{3}.$$

Táto nerovnosť, ako je známe, platí všeobecne pre ľubovoľnú trojicu nezáporných čísel a, b, c, pritom rovnosť nastane jedine v prípade $a = b = c$. (V zadanej úlohe je aritmetický priemer čísel a, b, c rovný 1, takže platí $\sqrt[3]{abc} \leqq 1$, čiže $abc \leqq 1$.)

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Pre reálne čísla a, b, c so súčtom 3 platí navyše $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Aké hodnoty môže nadobúdať výraz $ab + bc + ca$? [Keďže $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$, je nutne $ab + bc + ca = 2$. Hodnota je dosiahnuteľná vďaka trojici $(2, 1, 0)$.]

N2. Nezáporné reálne čísla a, b, c sú všetky nanajvýš rovné 1. Dokážte, že $3abc \leqq a + b + c$. Kedy nastane rovnosť? [Upravíme na $a(1 - bc) + b(1 - ac) + c(1 - ab) \geqq 0$, výrazy v zátvorkách sú nezáporné. Rovnosť nastane práve vtedy, keď buď $a = b = c = 0$, alebo $a = b = c = 1$.]

D1. Dokážte, že pre reálne čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$. Kedy nastane rovnosť? [Nerovnosť je ekvivalentná s $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$, ktorá určite platí. Rovnosť nastane jedine v prípade $a = b = c$.]

D2. Reálne čísla a, b, c majú súčet 3. Dokážte, že $3 \geqq ab + bc + ca$. Kedy nastane rovnosť? [Vyplýva z rovnosti $9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ a z predošlej úlohy. Rovnosť nastane jedine v prípade $a = b = c = 1$.]

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z platí nerovnosť

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 \geqq 4y(x + z)$$

a zistite, kedy nastane rovnosť. [Anulujte pravú stranu danej nerovnosti a upravte ju následne na tvar $(x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) \geqq 0$, pričom na ľavej strane je nezáporný súčet $(x - 2y)^2 + (y - 2z)^2$. Rovnosť tu nastane práve vtedy, keď platí $(x, y, z) = (4c, 2c, c)$, pričom c je ľubovoľné reálne číslo.]

D4. Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka. Dokážte, že platí nerovnosť

$$3a^2 + 2bc > 2ab + 2ac.$$

[Danú nerovnosť upravte na tvar $a^2 - (b - c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 > 0$ a rozdiel prvých dvoch druhých mocnín nahraďte príslušným súčinom.]

---

4. *Každé políčko tabuľky 2×13 ofarbíme práve jednou zo štyroch farieb. Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby žiadne dve susedné políčka neboli ofarbené rovnakou farbou? (Za susedné považujeme práve tie políčka tabuľky, ktoré majú spoločnú stranu.)*
(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Políčka prvého stĺpca tabuľky môžeme za daných podmienok ofarbiť práve $4 \cdot 3 = 12$ spôsobmi. Susedný stĺpec potom možno podľa zadania úlohy ofarbiť práve $3^2 - 2$ spôsobmi, lebo každé políčko v ňom môžeme vzhľadom na susedný stĺpec ofarbiť jednou z troch zvyšných farieb, od výsledného počtu 3^2 možností však musíme odčítať oba prípady, keď by sme v tomto stĺpci dostali pod sebou dve rovnako ofarbené políčka (jedná sa práve o tie dve farby, ktoré neboli použité v prvom stĺpci).

Analogicky môžeme pokračovať v postupnom ofarbovaní ďalších stĺpcov, pričom pri každom z nich máme opäť vždy $3^2 - 2$ možností. Počty možností pre jednotlivé stĺpce nakoniec medzi sebou vynásobíme, aby sme dostali hľadaný počet spôsobov vyhovujúcich ofarbení celej tabuľky.

Záver. Celkovo existuje $12\cdot(3^2-2)^{13-1} = 12\cdot 7^{12}$ možností pre ofarbenie políčok tabuľky 2×13 požadovaným spôsobom.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka tabuľky 2×3 dvoma rôznymi farbami tak, že každé políčko je ofarbené jednou farbou? [Pre každé políčko tabuľky existujú vždy 2 možnosti ofarbenia, pre celú tabuľku máme teda $2^6 = 64$ možností.]

N2. Každé políčko tabuľky 13×13 ofarbíme práve jednou z dvoch farieb. Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby žiadne dve susedné políčka neboli ofarbené rovnakou farbou? [2 možnosti.]

N3. Každé políčko tabuľky 2×2 ofarbíme práve jednou z troch farieb. Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby žiadne dve susedné políčka neboli ofarbené rovnakou farbou? [Pre ofarbenie prvých dvoch susedných políčok máme 6 možností, pre zvyšné políčka potom už iba tri možnosti, celkom $6 \cdot 3 = 18$ možností.]

D1. Určte, koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka tabuľky 3×3 tromi rôznymi farbami (každé políčko práve jednou farbou) tak, aby v každom riadku a každom stĺpci boli použité všetky tri farby. [Existuje 12 možností. Prvý stĺpec ofarbíme celkom $3 \cdot 2 = 6$ spôsobmi, pre druhý stĺpec máme vzhľadom na podmienky úlohy iba 2 možnosti. Ofarbenie políčok posledného, tretieho stĺpca je tým už jednoznačne určené. Celkovo tak máme $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ možností.]

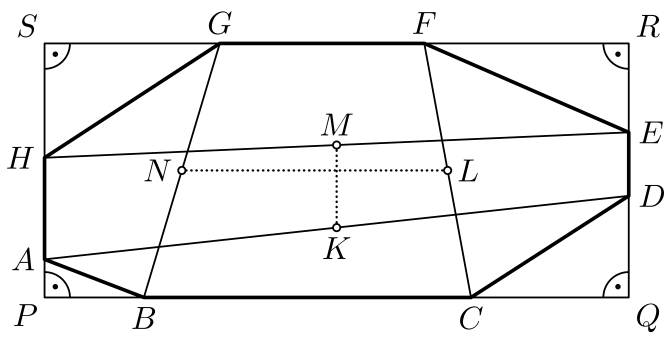
---

5. *Nech α, β, γ, δ, ε, φ, ψ, ω sú postupne veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B, C, D, E, F, G, H konvexného osemuholníka $ABCDEFGH$, v ktorom platí*

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = \psi + \omega.$$

Označme ďalej K, L, M, N postupne stredy uhlopriečok AD, CF, EH, GB. Dokážte, že priamky KM a LN sú navzájom kolmé. (*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov konvexného osemuholníka je $6 \cdot 180° = 1\,080°$, takže každý zo súčtov štyroch dvojíc susedných uhlov zo zadania úlohy je rovný $1\,080° : 4 = 270°$, čo zároveň znamená, že všetkých osem vnútorných uhlov je tupých. Označme postupne P, Q, R a S priesečníky dvojíc priamok strán susediacich so stranami AB, CD, EF a GH (obr. 2). Potom platí $|\measuredangle APB| = 180° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = (\alpha + \beta) - 180° = 90°$, takže priamky BC a AH sú na seba kolmé. Podobne dokážeme, že $BC \perp DE$, $ED \perp FG$ a aj $FG \perp AH$. Priesečníky priamok, na ktorých ležia strany AH, BC, DE a FG, teda tvoria vrcholy pravouholníka $PQRS$.



Obr. 2

Body K a M sú teda stredmi priečok AD a EH ($K \neq M$) pásu ohraničeného rovnobežkami PS a QR, a preto ležia na jeho osi. Podobne body L a N ($L \neq N$) sú stredmi priečok CF a GB, a ležia tak na osi pásu ohraničeného rovnobežkami PQ a RS. Vzhľadom na to, že osi oboch pásov sú na seba kolmé, sú na seba kolmé aj priamky KM a LN, čo sme mali dokázať.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre ľubovoľné prirodzené $n \geqq 3$ odvoďte vzorec pre súčet s_n veľkostí všetkých vnútorných uhlov konvexného n-uholníka. [$s_n = (n-2) \cdot 180°$]

N2. V rovine je daný konvexný šesťuholník $ABCDEF$ so zhodnými vnútornými uhlami. Dokážte, že osi jeho strán AB, CD a EF sa pretínajú v jednom spoločnom bode. [Priesečníky priamok BC, DE a FA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. Osi jeho vnútorných uhlov sú totožné s osami úsečiek AB, CD a EF.]

N3. V rovine je daný konvexný päťuholník $ABCDE$ so zhodnými vnútornými uhlami. Dokážte, že osi jeho strán BC, EA a os vnútorného uhla pri vrchole D sa pretínajú v jednom spoločnom bode. [Priesečníky priamok AB, CD a DE tvoria vrcholy rovnoramenného trojuholníka s hlavným vrcholom D. Osi vnútorných uhlov pri jeho základni sú totožné s osami úsečiek BC a EA.]

---

6. *Nájdite všetky trojciferné čísla n s tromi rôznymi nenulovými ciframi, ktoré sú deliteľné súčtom všetkých troch dvojciferných čísel, ktoré dostaneme, keď v pôvodnom čísle vyškrtneme vždy jednu cifru.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Hľadáme trojciferné čísla $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, ktoré sú deliteľné súčtom

$$\overline{bc} + \overline{ac} + \overline{ab} = (10b + c) + (10a + c) + (10a + b) = 20a + 11b + 2c,$$

pričom $\{a, b, c\}$ je trojprvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$. To nastane práve vtedy, keď existuje prirodzené číslo k také, že

$$100a + 10b + c = k(20a + 11b + 2c),$$

čiže

$$(100 - 20k)a = (11k - 10)b + (2k - 1)c. \qquad (1)$$

Keďže pravá strana poslednej rovnice je kladná, musí (vzhľadom na tvar ľavej strany) platiť $k \leqq 4$. Možné hodnoty k teraz preskúmame jednotlivo.

- ▷ $k = 1$. Z (1) máme rovnicu $80a = b + c$, ktorá nemá riešenie, lebo $80a \geqq 80$ a $b + c \leqq 17$.
- ▷ $k = 2$. Z (1) dostaneme rovnicu $60a = 12b + 3c$, čiže $20a = 4b + c$. Keďže $4b + c \leqq 44$, je $a \leqq 2$. Navyše z rovnice vyplýva, že číslo c musí byť násobkom štyroch, teda

$c \in \{4, 8\}$, čo v oboch prípadoch $a = 1$, $a = 2$ výhodne využijeme.

Pre $a = 1$ máme $20 = 4b + c$ s jedinou vyhovujúcou dvojicou rôznych cifier $b = 3$, $c = 8$, ktorej zodpovedá $n = 138$.

Pre $a = 2$ máme $40 = 4b + c$ s jedinou vyhovujúcou dvojicou rôznych cifier $b = 9$, $c = 4$, ktorej zodpovedá $n = 294$.

- ▷ $k = 3$. Z (1) máme rovnicu $40a = 23b + 5c$. Podľa deliteľnosti piatimi môže byť jedine $b = 5$. Dostaneme tak $40a = 23 \cdot 5 + 5c$, čiže $8a = 23 + c$ s dvoma vyhovujúcimi dvojicami (a, c) rovnými $(3, 1)$ a $(4, 9)$, ktorým zodpovedajú dve hľadané n, a to $n = 351$ a $n = 459$.
- ▷ $k = 4$. Z (1) dostaneme rovnicu $20a = 34b + 7c$, čiže $20(a - b) = 7(2b + c)$. Keďže čísla 20 a 7 sú nesúdeliteľné a pravá strana je kladná, musí byť $a - b$ kladný násobok siedmich, takže $a - b = 7$ a $2b + c = 20$. Taká sústava nemá riešenie, lebo podľa prvej rovnice je $b \leqq 2$, a teda $2b + c \leqq 4 + 9 = 13$.

Záver. Danej úlohe vyhovujú štyri trojciferné čísla, a to 138, 294, 351 a 459.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky trojciferné čísla, ktoré sú jedenásťkrát väčšie ako ich ciferný súčet. [198, z rovnosti $100a + 10b + c = 11(a + b + c)$ upravenej na tvar $89a = b + 10c$ vyplýva $a = 1$, takže $b = 9$ a $c = 8$.]

N2. Určte všetky trojciferné čísla, ktoré sú sedemkrát väčšie ako dvojciferné číslo, ktoré vznikne z daného čísla vyškrtnutím jeho prostrednej cifry. [105, z rovnosti $100a + 10b + c = 7(10a + c)$ upravenej na tvar $5(3a + b) = 3c$ vyplýva $c = 5$.]

N3. Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$, pre ktoré platí $\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 16 \cdot \overline{cd}$. [65–C–S–1]

D1. Nájdite najväčšie trojciferné číslo, z ktorého po vyškrtnutí ľubovoľnej cifry dostaneme prvočíslo. [67–C–S–1]

D2. Nájdite najmenšie štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ také, že rozdiel $(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$ je trojciferné číslo zapísané tromi rovnakými ciframi. [67–C–I–1]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Tomáš Jurík, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018