68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

---

1. *Na tabuli je napísané kladné celé číslo n. V jednom kroku smieme číslo z tabule zotrieť a napísať namiesto neho buď jeho dvojnásobok, alebo jeho dvojnásobok zväčšený o 1. Pre koľko počiatočných čísel n rôznych od 2019 môžeme dosiahnuť to, že sa po konečne veľa krokoch číslo 2019 na tabuli objaví?* (Josef Tkadlec)

Riešenie. V jednom kroku aktuálne prirodzené číslo k zväčšíme buď na párne číslo $m = 2k$, alebo na nepárne číslo $m = 2k + 1$. Podľa parity nového čísla m tak môžeme rekonštruovať predchádzajúce číslo k: buď $k = m/2$, alebo $k = (m-1)/2$ – podľa toho, či m je párne alebo nepárne.

Nepárne číslo 2 019 sa teda na tabuli objaví jedine po čísle $(2\,019 - 1)/2 = 1\,009$. Keďže je to opäť číslo nepárne, po dvoch krokoch sa dostaneme k cieľovému číslu 2 019 iba z čísla $(1\,009 - 1)/2 = 504$. To je číslo párne, takže po troch krokoch dostaneme 2 019 iba z čísla $504 : 2 = 252$, atď. Celý postup určovania všetkých vyhovujúcich čísel od konečného 2 019 vedie k nasledujúcemu výsledku:

$$2\,019 \leftarrow 1\,009 \leftarrow 504 \leftarrow 252 \leftarrow 126 \leftarrow 63 \leftarrow 31 \leftarrow 15 \leftarrow 7 \leftarrow 3 \leftarrow 1.$$

(Číslo 1 je najmenšie prirodzené číslo, takže ďalej nepokračujeme.)

Odpoveď. Takých počiatočných hodnôt čísla n je desať (sú to 1, 3, 7, 15, 31, 63, 126, 252, 504 a 1 009).

Iné riešenie. Ak budeme čísla na tabuli zapisovať v dvojkovej sústave, spočíva každá úprava aktuálneho čísla n v tom, že ho vôbec nemusíme zotierať, stačí len k jeho zápisu pripísať sprava buď nulu (zmena n na $2n$), alebo jednotku (zmena n na $2n + 1$). Číslo 2 019 teda dostaneme po určitom počte krokov práve z takých čísel, ktorých binárny zápis je tvorený skupinou niekoľkých prvých cifier binárneho zápisu čísla 2 019. Keďže $2^{10} = 1\,024 < 2\,019 < 2\,048 = 2^{11}$, má binárny zápis čísla 2 019 práve 11 cifier, takže existuje celkom 10 počiatočných čísel n, z ktorých po jednom či viac krokoch dostaneme číslo 2 019. (Najmenšie z týchto čísel je číslo 1, ktoré zodpovedá prvej cifre binárneho zápisu čísla 2 019, na ostatných deväť čísel sa zadanie úlohy nepýta.)

Poznámka. Samotný zápis čísla 2019 v dvojkovej sústave nás nezaujíma, inak ho zvyčajne hľadáme práve postupnosťou úprav opísanou v prvom riešení. Tak binárny zápis 11111100011 čísla 2 019 dostaneme, keď v získanej skupine čísel $1, 3, 7, \dots, 1\,009, 2\,019$ zameníme každé nepárne číslo jednotkou a každé párne číslo nulou.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za všeobecné zdôvodnenie, že každé predchádzajúce číslo je určené číslom nasledujúcim, 1 bod za nájdenie všetkých čísel až po jednotku a 1 bod za formuláciu správneho záveru.

Všeobecný opis z prvého odseku riešenia nie je nutný (rovnako ako záverečná poznámka o najmenšom prirodzenom čísle 1), riešiteľ môže spätný postup rovno začať určením čísla 1 009 z čísla 2 009 a pokračovať ďalej. Ak však pri postupných výpočtoch čísel urobí numerickú chybu, viac ako 4 body neudeľujte. Ak urobí viac chýb, dajte nanajvýš 3 body. Za riešenia, ktoré našli 1009, ale nepokračovali v hľadaní ďalších čísel, dajte 1 bod.

V prípade druhého riešenia dajte po 1 bode za opis správania operácie $\times 2$ a za opis správania operácie $\times 2 + 1$ v dvojkovej sústave. Ďalšie 2 body za vysvetlenie, ktoré čísla zodpovedajú hľadaným, 1 bod za nájdenie počtu cifier čísla 2019 v dvojkovej sústave (buď odhadom alebo ručným prevodom) a napokon 1 bod za samotný záver.

2. *Nájdite všetky trojciferné čísla s touto vlastnosťou: ak vyškrtneme v čísle jeho prostrednú cifru a vzniknuté dvojciferné číslo vynásobíme druhou mocninou vyškrtnutej cifry, dostaneme opäť pôvodné trojciferné číslo.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Trojciferné číslo $n = \overline{abc}$ má požadovanú vlastnosť práve vtedy, keď jeho cifry a, b, c spĺňajú rovnicu

$$100a + 10b + c = (10a + c)b^2. \tag{1}$$

Keďže cifra b v nej má najzložitejšie zastúpenie, rozoberieme postupne jej možné hodnoty.

Najskôr si všimneme, že nemôže byť $b \in \{0, 1\}$ (pre také cifry by pravá strana (1) nebola trojciferným číslom). Keďže $a \geqq 1$, nemôže byť ani $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ – pre také cifry by pravá strana bola aspoň $250a$, zatiaľ čo ľavá strana (1) je vždy menšia ako $100a + 100 \leqq 200a$. Ostáva nám preto prebrať hodnoty $b \in \{2, 3, 4\}$.

Pre $b = 2$ sa zmení (1) na rovnicu $100a+20+c = 40a+4c$, čiže $20 = 3(c-20a)$, čo je vylúčené, lebo 20 nie je násobkom troch (navyše $c - 20a < 0$ vďaka tomu, že $a \geqq 1$ a $c \leqq 9$).

Pre $b = 3$ sa zmení (1) na rovnicu $100a + 30 + c = 90a + 9c$, čiže $5(a + 3) = 4c$, čo znamená, že c je nenulová cifra deliteľná piatimi, teda $c = 5$, a tak $a = 1$. Našli sme riešenie $n = 135$ (skúška nie je nutná).

Pre $b = 4$ sa zmení (1) na rovnicu $100a+40+c = 160a+16c$, čiže $40 = 3(20a+5c)$, čo je vylúčené, pretože 40 nie je násobkom troch (navyše je $3(20a + 5c) \geqq 60$).

Odpoveď. Vyhovuje jediné číslo 135.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za zostavenie rovnice, 1 bod za vylúčenie $b \leqq 1$, 1 bod za vylúčenie $b \geqq 5$, 1 bod za vylúčenie $b = 2$, 1 bod za vylúčenie $b = 4$, 1 bod za vyriešenie $b = 3$ a nájdenie čísla 135. V prípade neúplného riešenia dajte 1 bod za uhádnutie riešenia.

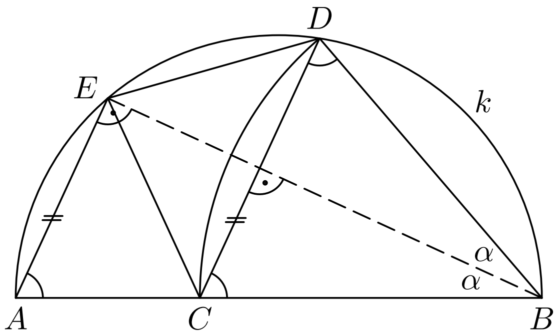
---

3. *Daná je kružnica k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB zvolíme ľubovoľný bod C a potom na kružnici k vyberieme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Os uhla ABD pretína kružnicu k v bode E (rôznom od bodu B). Dokážte, že trojuholníky AEC a CBD sú podobné.* (Šárka Gergelitsová)

Riešenie. Keďže druhý z trojuholníkov AEC a CBD je podľa zadania rovnoramenný s hlavným vrcholom B, ukážeme v prvej časti riešenia, že aj prvý trojuholník AEC je rovnoramenný s hlavným vrcholom E.

Keďže bod E leží na osi uhla ABD, majú jednak oba uhly ABE a DBE rovnakú veľkosť, ktorú označíme α (obr. 1), jednak platí $|EC| = |ED|$. Úsečka DE je však zhodná aj s úsečkou AE, lebo im obom ako tetivám kružnice k zodpovedajú zhodné obvodové uhly α s vrcholom B.[1] Spolu dostávame, že aj úsečky AE a CE sú zhodné. Teda AEC je naozaj rovnoramenný trojuholník s hlavným vrcholom E.

[1] Možno sa tiež odvolať na známy výsledok, že bod E je stredom oblúka AD kružnice opísanej trojuholníku ABD – ten sa však dokazuje práve použitím poučky, že zhodné obvodové uhly v jednej kružnici prislúchajú iba jej zhodným oblúkom.



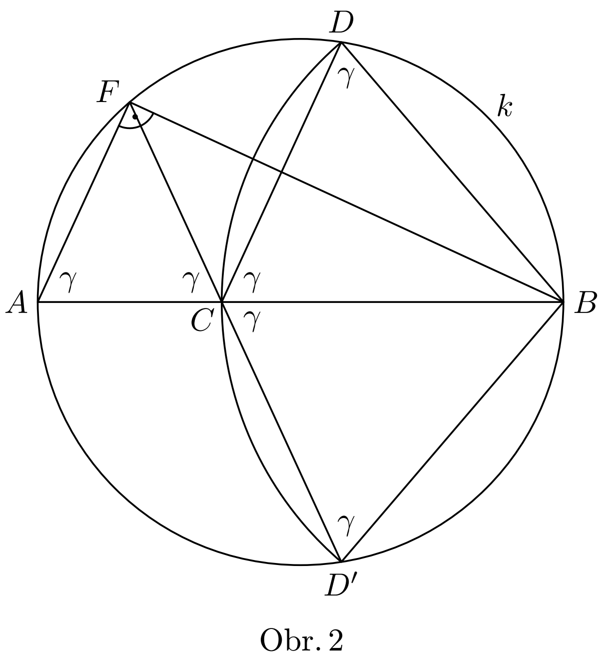
Obr. 1

Rovnoramenné trojuholníky AEC a CBD budú (ako máme dokázať) podobné, a to podľa vety uu, keď ukážeme, že majú zhodné uhly EAC a BCD pri svojich základniach AC, resp. CD. To je však na obrázku už vyznačené ako dôsledok rovnobežnosti úsečiek AE a CD, ktoré sú totiž obe kolmé na priamku BE (uhol AEB je pravý podľa Tálesovej vety, kolmosť $BE \perp CD$ vyplýva z osovej súmernosti trojuholníka BCD).

Ak si nevšimneme rovnobežnosť úsečiek CD a AE, možno z trojuholníkov BCD a ABE ľahko vypočítať, že oba uhly BCD a BAE (a teda aj CAE) majú veľkosť $90° - \alpha$.

Poznámka. Rovnoramennosť trojuholníka AEC sa dá zdôvodniť aj tak, že $|\measuredangle CAE| = 180° - |\measuredangle EDB|$ (kružnica) $= 180° - |\measuredangle ECB|$ (osová súmernosť) $= |\measuredangle ACE|$ (vedľajší uhol).

Iné riešenie. Kružnica so stredom B a polomerom $|BC|$ pretína kružnicu k nielen v bode D, ale tiež v bode D', ktorý je s bodom D súmerne združený podľa priemeru AB kružnice k. Označme ešte F druhý priesečník priamky CD' s kružnicou k. Súmerne združené rovnoramenné trojuholníky CBD a CBD' majú pri svojich základniach CD a CD' štyri zhodné vnútorné uhly, ktoré sú na obr. 2 označené písmenami γ rovnako ako piaty uhol ACF (vrcholový k uhlu BCD') a šiesty uhol FAB (zhodný s obvodovým uhlom $FD'B$). Podľa vety uu sú trojuholníky AFC a CBD podobné, takže naše riešenie



Obr. 2

bude hotové, keď ukážeme, že bod F leží na osi uhla CBD (a teda platí $E = F$). To je však jednoduché: jednak vďaka zhodným súhlasným uhlom BAF, BCD platí $AF \parallel CD$, jednak vďaka tomu, že uhol AFB je podľa Tálesovej vety pravý, platí $BF \perp AF$; spolu máme $BF \perp CD$, a tak je priamka BF naozaj osou súmernosti rovnoramenného trojuholníka BCD s hlavným vrcholom B.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri postupe z prvého riešenia dajte celkom 4 body za dôkaz, že AEC je rovnoramenný trojuholník (z toho 1 bod za odvodenie rovnosti $|CE| = |DE|$, 2 body za zdôvodnenie rovnosti $|AE| = |DE|$, ďalší 1 bod za ich dôsledok $|AE| = |CE|$) a napokon 2 body za porovnanie vnútorných uhlov oboch rovnoramenných trojuholníkov. Za nezdôvodnené konštatovanie rovnosti $|AE| = |CE|$ žiadny bod neudeľujte, za prípadné pokračovanie v podobe overovania zhodnosti vnútorných uhlov oboch dotyčných trojuholníkov potom dajte nanajvýš 1 bod. Ten dajte aj v prípade, keď jediným odvodeným poznatkom je fakt $AE \parallel CD$ a jeho dôsledok v podobe zhodnosti uhlov CAE a BCD.

Pri druhom postupe dajte 2 body za konštrukciu bodov D' a F, 2 body za dôkaz podobnosti trojuholníkov AFC, BCD a 2 body za zdôvodnenie rovnosti $E = F$.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019