68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Aký je najväčší možný počet čísel, ktoré sa dajú vybrať z množiny* $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ *tak, aby súčin žiadnych troch z vybraných čísel nebol deliteľný deviatimi? Uveďte príklad vyhovujúcej podmnožiny a zdôvodnite, prečo nemôže mať väčší počet prvkov.*
(*Aleš Kobza*)

Riešenie. Medzi vybranými číslami nesmie byť žiadny násobok deviatich a pritom medzi nimi môže byť nanajvýš jedno číslo, ktoré je deliteľné tromi, nie však deviatimi. Môžeme teda vybrať všetky čísla, ktoré nie sú deliteľné tromi, a pridať k nim akékoľvek číslo, ktoré je deliteľné tromi, nie však deviatimi.

Záver. Najväčší možný počet čísel, ktoré môžeme požadovaným spôsobom vybrať z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$, je teda rovný $\frac{2}{3} \cdot 2\,019 + 1 = 1\,347$.

Úlohe vyhovuje napr. množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots, 2015, 2017, 2018\}$, ktorá má práve 1 347 prvkov. Táto množina obsahuje číslo 3 ako jediné číslo deliteľné tromi, ktoré však deviatimi deliteľné nie je.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za zdôvodnenie, že tam nemôže byť číslo deliteľné 9, 1 bod za zdôvodnenie, že tam môže byť nanajvýš jedno číslo deliteľné 3 (nedeliteľné 9), 3 body za odhad maximálneho počtu prvkov na základe týchto pozorovaní, 1 bod za príklad vyhovujúcej množiny.

---

2. *Pavol a Michal hrajú nasledujúcu hru: Pri vrcholoch štvorstena (trojbokého ihlana) sú zozačiatku napísané nuly. Pavol najskôr vyberie niektorý vrchol štvorstena a zväčší číslo pri ňom napísané o 2. Potom Michal vyberie niektorú hranu tohto štvorstena a zväčší čísla v oboch jej krajných bodoch o 1. Ich „ťahy“ sa pravidelne striedajú. Vyhráva ten, po ktorého ťahu budú vo všetkých vrcholoch štvorstena navzájom rôzne čísla. Ktorý z hráčov si dokáže zabezpečiť výhru?* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Ukážeme, že vyhrávajúcu stratégiu má Pavol, ktorý môže vyhrať už svojim druhým ťahom.

Vrcholy uvažovaného štvorstena označme písmenami A, B, C, D. V prvom ťahu Pavol zväčší o 2 číslo pri niektorom vrchole štvorstena $ABCD$, napr. pri A. Michal potom zvolí buď niektorú hranu vychádzajúcu z toho istého vrcholu (napr. AB), alebo vyberie niektorú hranu, ktorá z A nevychádza, napr. BC.

V prvom prípade Pavol (vo svojom druhom ťahu) zväčší o 2 číslo napísané pri jednom z vrcholov C, D, napr. pri vrchole C. Pri jednotlivých vrcholoch A, B, C, D štvorstena $ABCD$ potom budú *po rade* napísané navzájom rôzne čísla 3, 1, 2, 0. V druhom prípade Pavol zväčší o 2 hodnotu pri niektorom z vrcholov B alebo C, napr. pri B. Pri jednotlivých vrcholoch A, B, C, D uvažovaného štvorstena $ABCD$ sú potom aj v tomto prípade napísané *po rade* navzájom rôzne čísla 2, 3, 1, 0.

Tým je úloha vyriešená.

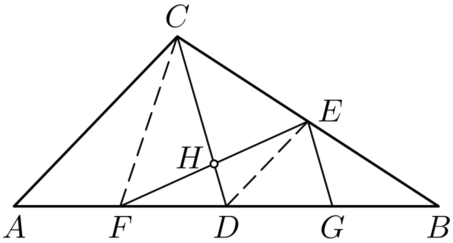
Poznámka. Úlohu možno riešiť bez označenia vrcholov iba úvahami o neusporiadaných štvoriciach k nim pripísaných čísel, keďže každé dva vrcholy štvorstena sú spojené hranou. So zápismi štvoríc čísel v poradí od najväčšieho po najmenšie potom celé riešenie vyzerá nasledovne: Po prvom Pavlovom ťahu vznikne štvorica 2, 0, 0, 0, ktorú Michal môže zmeniť buď na štvoricu 3, 1, 0, 0, alebo na štvoricu 2, 1, 1, 0. Každú z oboch štvoríc zrejme Pavol dokáže svojim druhým ťahom zmeniť na štvoricu 3, 2, 1, 0, a to buď zväčšením jednej z dvoch núl na dvojku, alebo zväčšením jednej z dvoch jednotiek na trojku.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za vysvetlenie, že po dvoch ťahoch sú možnosti 3, 1, 0, 0 resp. 2, 1, 1, 0, následne 2 body za prvý prípad, 2 body za druhý prípad, 1 bod za záver. Za holé konštatovanie (bez hlbšieho zdôvodnenia), že vyhrávajúcu stratégiu má Pavol, dajte 1 bod.

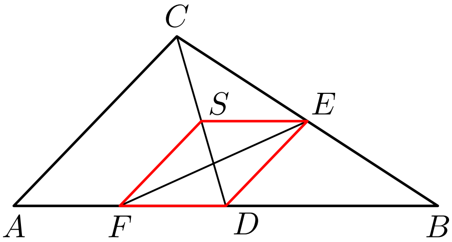
---

3. *Nech D, E sú postupne stredy strán AB, BC trojuholníka ABC a F je stred úsečky AD. Dokážte, že priamka CD rozpoľuje úsečku EF.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Nech G označuje stred úsečky BD, čo znamená, že bod D je nielen stredom strany AB, ale aj stredom úsečky FG (obr. 1). Úsečka EG je potom strednou priečkou v trojuholníku BCD, a je teda rovnobežná s CD. Bod C tak leží na rovnobežke so stranou EG trojuholníka GEF idúcej stredom D jeho strany FG, a preto táto rovnobežka CD nutne prechádza aj stredom H tretej strany EF, ako sme mali dokázať.

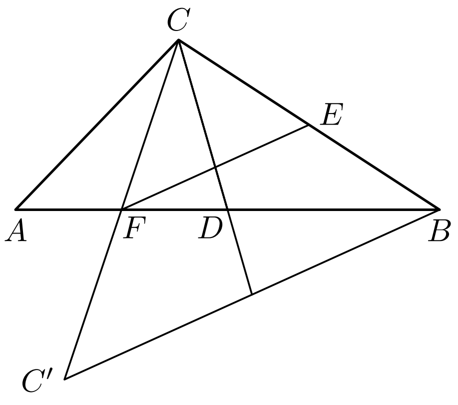


Obr. 1



Obr. 2

Iné riešenie. Označme S stred ťažnice CD trojuholníka ABC (obr. 2). Úsečka DE je stredná priečka v trojuholníku ABC, takže $|DE| = \frac{1}{2}|AC|$, a úsečka FS je stredná priečka v trojuholníku ADC, takže $|FS| = \frac{1}{2}|AC|$. Úsečky DE a FS sú teda zhodné a rovnobežné (so stranou AC). Štvoruholník $DESF$ je preto rovnobežník, a ako je známe, jeho uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú. Tým je dôkaz ukončený.



Obr. 3

Iné riešenie. Pre bod D platí $|FD| : |DB| = 1 : 2$. Ak zostrojíme bod C' ako obraz bodu C v stredovej súmernosti podľa stredu F (obr. 3), bude BF ťažnica trojuholníka

BCC' a bod D jeho ťažisko. Priamka CD teda obsahuje ťažnicu trojuholníka BCC', a preto rozpoľuje jeho stranu BC' rovnako ako jeho strednú priečku EF s ňou rovnobežnú.

Iné riešenie. Máme dokázať, že na priamke CD leží ťažnica trojuholníka CEF, čo je ekvivalentné s tým, že obsahy trojuholníkov CDF a CED (obr. 1) sú rovnaké.[1] Pritom zrejme pre obsahy jednotlivých trojuholníkov platí

$$S(CDE) = \tfrac{1}{2}S(DBC) = \tfrac{1}{2}S(CAD) = S(DFC),$$

lebo E je stred BC, D je stred AB a F je stred AD.

Poznámka. Rovnosť obsahov sa dá dokázať aj postupným výpočtom obsahov vzhľadom na obsah trojuholníka ABC: Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $S(ABC) = 1$. Keďže $|FB| : |AB| = \frac{3}{4}$, je $S(BFC) = \frac{3}{4}$. Keďže $|FD| : |DB| = \frac{1}{2}$, je $S(CDF) = \frac{1}{4}$. Ďalej $S(CDB) = \frac{1}{2}$, a keďže E je stred CB, je $S(CED) = \frac{1}{2}S(CDB) = \frac{1}{4}$, takže naozaj $S(CDF) = S(CDB)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri prvom postupe dajte 3 body za zavedenie bodu G, 1 bod za dôkaz $EG \parallel CD$, 2 body za zdôvodnenie, že stredná priečka DH trojuholníka GEF musí ležať na priamke CD.

Pri druhom postupe dajte 3 body za zavedenie bodu S, 1 bod za objav oboch stredných priečok ED, FS, 1 bod za zdôvodnenie, že sa jedná o dve rovnobežné a zhodné úsečky, a 1 bod za záver, že $DESF$ je rovnobežník, a teda sa jeho uhlopriečky rozpoľujú (namiesto toho možno uplatniť vetu *usu* na dôkaz zhodnosti trojuholníkov DEH a SFH, pričom H označuje priesečník uhlopriečok, z ktorej potrebná rovnosť $|EH| = |FH|$ vyplýva).

Pri treťom postupe dajte 3 body za zavedenie bodu C', 1 bod za zdôvodnenie, že D je ťažisko trojuholníka BCC' (a teda CD je priamka jeho ťažnice), ďalej 1 bod za objav strednej priečky EF a 1 bod za záver, že ťažnica rozpoľuje strednú priečku.

Napokon za tvrdenie, že stačí dokázať rovnosť obsahov trojuholníkov CDF, CED (alebo ekvivalentne, že obsah štvoruholníka $CFDE$ je dvakrát väčší ako jeden z nich) dajte 3 body, za dôkaz rovnosti spomenutých obsahov ďalšie 3 body. Za nedokončený výpočet však dajte nanajvýš 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Tomáš Jurík, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019

[1] To vyplýva zo známeho faktu, že pre ľubovoľný bod X vnútri uhla QPR majú trojuholníky PXQ, PXR rovnaký obsah práve vtedy, keď bod X leží na priamke ťažnice z vrcholu P trojuholníka PQR.