68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5*

---

1. *Miška má päť pasteliek. Vojto ich má menej ako Miška. Vendelín ich má toľko, koľko Miška a Vojto spolu. Všetci traja spolu majú sedemkrát viac pasteliek, ako má Vojto. Koľko pasteliek má Vendelín?* (Libuše Hozová)

Nápad. Koľko najmenej a koľko najviac pasteliek môžu mať dokopy?

Riešenie. Vojto má menej pasteliek ako Miška, teda môže mať

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \text{alebo } 4$$

pasteliek. Vendelín má o päť viac pasteliek ako Vojto, teda môže mať postupne

$$5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \text{alebo } 9$$

pasteliek. Všetci traja dokopy majú dvojnásobok toho, čo má Vendelín, teda môžu mať postupne

$$10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \text{alebo } 18$$

pasteliek.

Medzi týmito číslami je jedine 14 sedemnásobkom celého čísla, $14 = 7 \cdot 2$. Teda Vojto má 2 pastelky a Vendelín $2 + 5 = 7$ pasteliek.

---

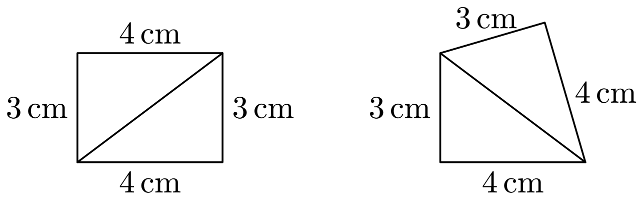
2. *Tereza dostala štyri zhodné pravouhlé trojuholníky so stranami dĺžok 3 cm, 4 cm a 5 cm. Z týchto trojuholníkov (nie nutne zo všetkých štyroch) skúšala skladať nové útvary. Postupne sa jej podarilo zložiť štvoruholníky s obvodom 14 cm, 18 cm, 22 cm a 26 cm, a to zakaždým dvoma rôznymi spôsobmi (t. j. tak, že žiadne dva štvoruholníky neboli zhodné). Nakreslite, aké štvoruholníky mohla Tereza zložiť.* (Lucie Růžičková)

Nápad. Vyrobte si tiež také trojuholníky.

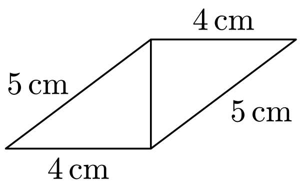
Riešenie. Obvod jedného trojuholníka je $3+4+5 = 12$ (cm). Po priložení trojuholníka celou stranou k už zloženému útvaru môže byť obvod nového útvaru väčší buď o $3 + 4 - 5 = 2$, alebo o $3 + 5 - 4 = 4$, alebo o $4 + 5 - 3 = 6$ (cm). Tieto poznatky poskytujú určitú pomôcku k tomu, ako prikladaním trojuholníkov realizovať ten-ktorý obvod. Hlavná podmienka, ktorú je nutné pri experimentovaní strážiť, je, aby výsledný útvar bol štvoruholníkom.

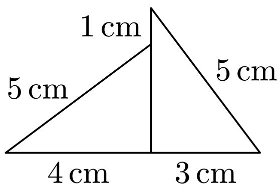
Pre jednotlivé obvody uvádzame všetky riešenia, pre ktoré sú výsledné štvoruholníky navzájom nezhodné (v niektorých prípadoch je možné trojuholníky, z ktorých je štvoruholník zložený, ešte poprekladať). Pre vyhovujúce riešenie úlohy stačí pri každom obvode uviesť dve možnosti.

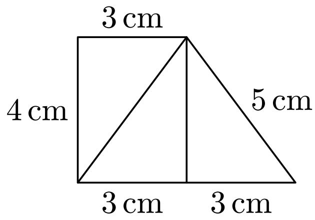
Štvoruholník s obvodom 14 cm možno zložiť iba z dvoch trojuholníkov:



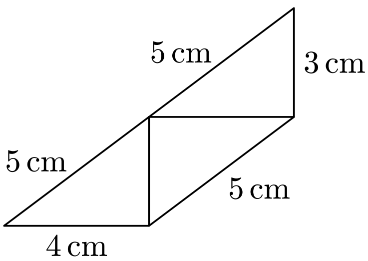
Štvoruholník s obvodom 18 cm možno zložiť buď z dvoch, alebo z troch trojuholníkov:

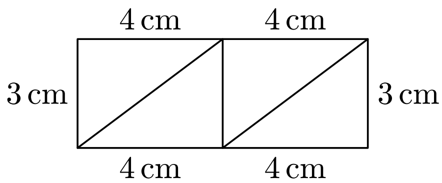


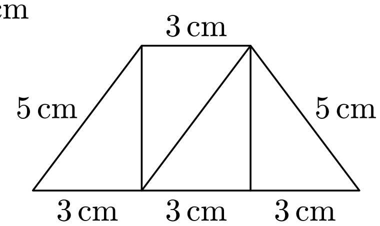


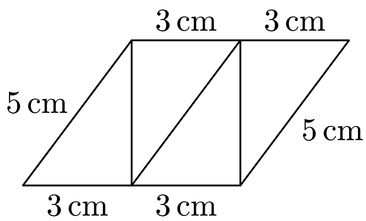


Štvoruholník s obvodom 22 cm možno zložiť len buď z troch, alebo zo štyroch trojuholníkov:

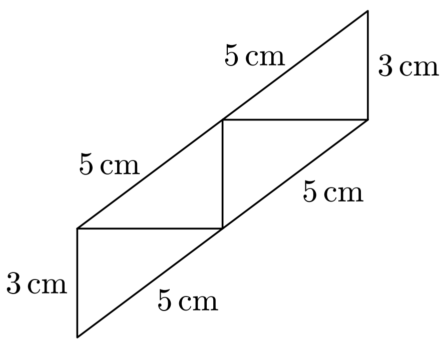


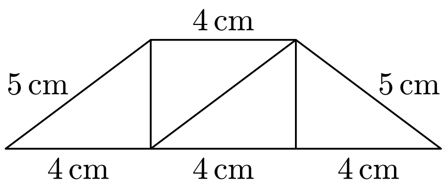


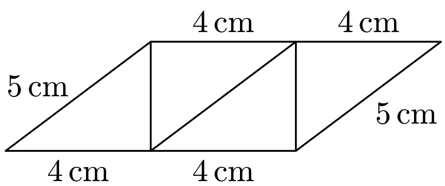




Štvoruholník s obvodom 26 cm možno zložiť len zo štyroch trojuholníkov:







Poznámka. To, že uvedené útvary sú štvoruholníky, vyplýva vo väčšine prípadov z toho, že v použitých trojuholníkoch sú pravé uhly oproti najdlhšej, päťcentimetrovej strane, príp. z toho, že z dvoch takých trojuholníkov sa dá zložiť obdĺžnik. Až na niekoľko výnimiek možno na problém pozerať aj ako na vymedzovanie oblastí v pomocnej obdĺžnikovej sieti (s uhlopriečkami). Úplné zdôvodnenie sa nedá po riešiteľoch v tejto kategórii vyžadovať.

3. *Štefka rada oslavuje, takže okrem narodenín vymyslela ešte antinarodeniny: dátum antinarodenín vznikne tak, že sa vymení číslo dňa a číslo mesiaca v dátume narodenia. Sama sa narodila 8. 11., takže antinarodeniny má 11. 8. Jej mamička antinarodeniny oslavovať nemôže: narodila sa 23. 7., jej antinarodeniny by mali byť 7. 23., čo ale nie je dátum žiadneho dňa v roku. Jej brat síce antinarodeniny oslavovať môže, ale má ich v ten istý deň ako narodeniny: narodil sa 3. 3. Koľko dní v roku je takých, že človek, ktorý sa toho dňa narodil, môže oslavovať svoje antinarodeniny, a to v iný deň ako svoje narodeniny?* (*Veronika Hucíková*)

Nápad. Ktorý deň v mesiaci musí mať človek narodeniny, aby mohol oslavovať antinarodeniny?

Riešenie. Kto sa narodil 1. 1., ten má antinarodeniny v ten istý deň ako narodeniny. Kto sa narodil v období od 2. 1. do 12. 1., ten má antinarodeniny v iný deň ako narodeniny. Kto sa narodil v období od 13. 1. do 31. 1., ten antinarodeniny oslavovať nemôže, keďže mesiacov v roku je len 12. V mesiaci január je teda 11 dní, ktoré vyhovujú požiadavke zo zadania.

Podobne je to v každom ďalšom mesiaci: prvých dvanásť dní dáva zmysluplný dátum antinarodenín, z toho práve v jednom prípade sa jedná o ten istý dátum. Vyhovujúcich dní v každom mesiaci je 11, mesiacov je 12, vyhovujúcich dní v roku je preto $11 \cdot 12 = 132$.

---

4. *V novej klubovni boli iba stoličky a stôl. Každá stolička mala štyri nohy, stôl bol trojnohý. Do klubovne prišli skauti. Každý si sadol na svoju stoličku, dve stoličky zostali neobsadené a počet nôh v miestnosti bol 101. Určte, koľko stoličiek bolo v klubovni.* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Koľko nôh prislúcha obsadenej stoličke?

Riešenie. Stôl a dve neobsadené stoličky majú celkom $3 + 8 = 11$ nôh. Na všetky obsadené stoličky tak pripadá $101 - 11 = 90$ nôh. Na každej takej stoličke sedel jeden skaut s dvoma nohami. V klubovni teda bolo $90 : 6 = 15$ obsadených stoličiek a $15 + 2 = 17$ stoličiek celkom.

---

5. *Tomáš dostal deväť kartičiek, na ktorých boli nasledujúce čísla a matematické symboly:*

$$18,\ 19,\ 20,\ 20,\ +,\ -,\ \times,\ (,\ )$$

Kartičky ukladal tak, že vedľa seba nikdy neležali dve kartičky s číslami, t. j. striedali sa kartičky s číslami a kartičky so symbolmi. Takto vzniknuté úlohy vypočítal a výsledok si zapísal. Určte, aký najväčší výsledok mohol Tomáš získať. (*Karel Pazourek*)

Nápad. Kam mohol Tomáš umiestniť zátvorky?

Riešenie. Tomáš mal 4 kartičky s číslami a 5 kartičiek so symbolmi. V ním zostavených úlohách sa tieto dva typy kartičiek striedali, preto každá začínala a končila symbolom:

S Č S Č S Č S Č S

Pred ľavou zátvorkou a za pravou zátvorkou by mal byť symbol s nejakou matematickou operáciou. Aby súčasne bola splnená predchádzajúca podmienka a aby kartičky tvorili zmysluplné úlohy, musel Tomáš umiestniť zátvorky na kraje takto:

(Č S Č S Č S Č)

Násobenie a pričítanie výsledok zväčšuje, pričom väčší vplyv má násobenie, odčítanie výsledok zmenšuje. Najväčší možný výsledok mohol Tomáš získať násobením najväčších možných čísel, odčítaním najmenšieho možného čísla a pričítaním zvyšného čísla, teda napr. takto:

$$(20 \times 20 - 18 + 19),$$

čo je rovné 401.

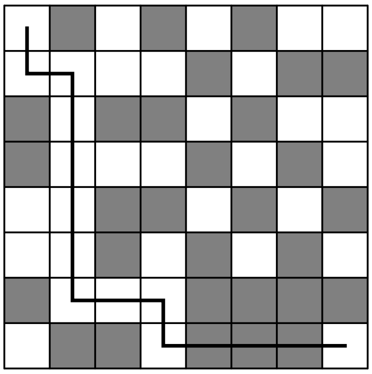
Poznámka. V uvedenom riešení sme neuvažovali skrátený zápis násobenia zátvorky číslom. S týmto nápadom by najväčší výsledok bolo možné získať takto:

$$+ 19 (20 \times 20 - 18),$$

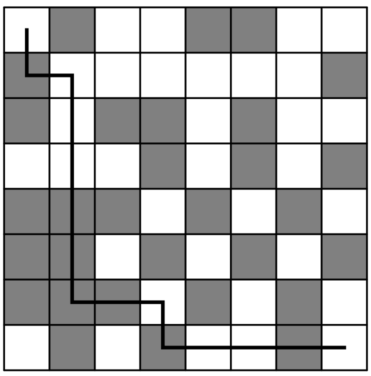
čo je rovné 7 258. Aj také riešenie hodnoťte ako správne.

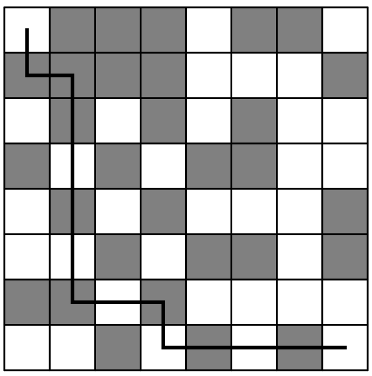
---

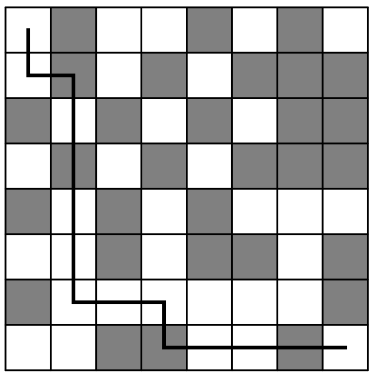
6. *Na obrázku je hrací plánik a cesta, ktorú Juro zamýšľal prejsť z pravého dolného rohu do ľavého horného. Potom zistil, že má plánik chybne pootočený, teda že by nezačínal v pravom dolnom rohu. Tvar zamýšľanej cesty už ale nemohol zmeniť a musel ju prejsť pri správnom natočení plánika. Pre každé z troch možných natočení prekreslite uvedenú cestu a určte, koľkými sivými políčkami táto cesta prechádza.* (Eva Semerádová)



Pri postupnom pootáčaní plánika dostávame:







Cesta v jednotlivých prípadoch prechádza siedmimi, ôsmimi, resp. štyrmi sivými políčkami.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018