MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

kategorie A, B, C a P

48. ROČNÍK, 1998/1999

Studenti středních škol,

zveme vás k účasti v matematické olympiádě, v soutěži pro žáky středních škol naší republiky.

Kategorie A je určena žákům maturitních a předmaturitních ročníků,
kategorie B žákům, kterým do maturity zbývá více než 2 roky,
kategorie C žákům, kterým do maturity zbývá více než 3 roky,
kategorie P je zaměřena na programování a je určena žákům všech ročníků. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka:

Předpokládaný školní rok ukončení studia maturitou	kategorie MO
1998/1999	A
1999/2000	A
2000/2001	B
2001/2002	C
2002/2003	Z9
2003/2004	Z8
2004/2005	Z7
2005/2006	Z6
2006/2007	Z5

Žáci prvních (druhých) ročníků osmiletých gymnázií soutěží v kategorii Z6 (Z7), úlohy I. kola najdou v letáku Matematická olympiáda pro žáky základních škol a nižších ročníků gymnázií.

Organizace soutěže v kategoriích A, B, C:

V **I. kole** na vás čeká šest domácích úloh, které najdete v tomto letáku. Jejich řešení (ne nutně všech) odevzdejte svému učiteli matematiky do **8. prosince 1998** (kategorie A) a do **26. ledna 1999** (kategorie B, C). Ten je opraví, ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje.* Pak je s vámi rozebere, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným řešením. Jestliže budou vaše řešení alespoň čtyř úloh ohodnocena jako výborná nebo dobrá, budete pozváni do školní části I. kola. Tam budete ve stanoveném čase samostatně řešit další tři úlohy.

Nejlepší účastníci I. kola budou pozváni do **II. kola**. Tam budou během čtyř hodin samostatně řešit čtyři úlohy. V kategoriích B a C tím soutěž končí. O pořadí v druhých kolech soutěže rozhoduje součet bodů získaných za jednotlivé úlohy, přičemž bodové hodnocení každé úlohy musí být nezáporné celé číslo. Pokud prvních n žáků dosáhne stejného počtu bodů, je jejich pořadí označeno shodně 1.–n. místem. Podobně pro pořadí na dalších místech. Žádná jiná kritéria nejsou přípustná.

V kategorii A budou ještě nejlepší řešitelé II. kola z celé republiky soutěžit ve **III. kole**, celostátním. Z vítězů III. kola se vybírá družstvo České republiky na mezinárodní matematickou olympiádu.

Organizace soutěže v kategorii P:

V **I. kole** řešíte jen čtyři úlohy uvedené v tomto letáku. Svá řešení odevzdáte svému učiteli matematiky do **4. prosince 1998**.

V kategorii P se nekoná školní část I. kola, takže úspěšní řešitelé zde uvedených úloh jsou pozváni do **II. kola**. Stejně jako v kategorii A se i v kategorii P koná celostátní kolo a mezinárodní olympiáda.

Předběžně byly stanoveny tyto termíny 48. ročníku MO:

	I. kolo (školní část)	II. kolo (oblastní)	III. kolo (celostátní)
Kategorie A	8. 12. 1998	19. 1. 1999	11.–14.4. 1999
Kategorie B, C	26. 1. 1999	30. 3. 1999	—
Kategorie P	—	12. 1. 1999	14.–17.4. 1999

MO pořádají *ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR*, *Jednota českých matematiků a fyziků* a *Matematický ústav Akademie věd České republiky*. Soutěž organizuje *ústřední výbor MO* a v oblastech ji řídí *oblastní výbory MO* při pobočkách JČMF. Na jednotlivých školách ji zajišťují učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
2. D, gymnázium
Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
1998/99
B–I–4

Poslední údaj je označení úlohy podle tohoto letáku. Znění úloh nemusíte opisovat. Nevejde-li se vám řešení na jeden list, uveďte na dalších listech vlevo nahoře své jméno a označení úlohy a očíslujte stránky. **Řešení pište jako výklad, v kterém jsou uvedeny všechny podstatné úvahy tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup.**

KATEGORIE A

A–I–1

Najděte nejmenší přirozené číslo, které lze dostat doplněním závorek do výrazu

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

(*P. Černek*)

A–I–2

Najděte všechna kladná čísla k, pro něž platí: Ze všech trojúhelníků ABC, v nichž $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$ a $|AC| : |BC| = k$, má největší obsah trojúhelník rovnoramenný. (*P. Černek*)

A–I–3

Pro která celá čísla a je maximum i minimum funkce

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36}$$

celé číslo? (*P. Černek*)

A–I–4

Označme $\tau(k)$ počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla k a nechť číslo n je řešením rovnice $\tau(1{,}6n) = 1{,}6\tau(n)$. Určete hodnotu podílu $\tau(0{,}16n) : \tau(n)$. (*P. Černek*)

A–I–5

Dokažte, že existuje trojúhelník ABC, v němž při obvyklém značení platí obě *pythagorejské* rovnosti $t_a^2 + t_b^2 = t_c^2$ a $v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$. Dále ukažte, že pro vnitřní úhly takového trojúhelníku platí $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ a $\cos\gamma = \frac{2}{5}\sqrt{5}$. (*J. Šimša*)

A–I–6

Z papíru byl slepen model čtyřstěnu, jehož každé dvě protilehlé hrany jsou shodné. Rozhodněte, zda můžeme model rozříznout podél tří úseček tak, aby ho pak bylo možno rozvinout do roviny a vznikl přitom obdélník. Existují pro pravidelný čtyřstěn dva uvažované způsoby rozřezání, při nichž vzniknou neshodné obdélníky? (*M. Hejný, P. Leischner*)

KATEGORIE B

B–I–1

Na louce jsou děti i dospělí. Počet procent chlapců ze všech dětí se rovná počtu procent dívek ze všech přítomných osob a také počtu všech dospělých. Kolik chlapců, dívek a dospělých je na louce?

(*Ľ. Fabšo, P. Černek*)

B–I–2

Uvažujme shodné polokružnice, které leží v daném pravém úhlu a jejichž koncové body leží každý na jiném jeho rameni. Určete množinu, kterou vyplní body všech těchto polokružnic. (*J. Zhouf*)

B–I–3

Najděte všechna trojmístná čísla v desítkové soustavě, která se rovnají třetině čísla s týmž zápisem v jiné číselné soustavě. (*P. Černek*)

B–I–4

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Na straně BC najděte bod P tak, aby kružnice vepsaná trojúhelníku ABP a kružnice připsaná straně PC trojúhelníku APC byly shodné. (*J. Švrček*)

B–I–5

Z koule o poloměru R je oddělena kulová úseč o výšce v ($v < R$). Této úseči je vepsána koule K o poloměru $\frac{1}{2}v$. Dále je do úseče vepsáno osm shodných menších koulí, z nichž každá se dotýká koule K. Žádné dvě z nich nemají společný vnitřní bod a každá z nich se dotýká právě dvou ostatních. Určete poměr $v : R$. (*J. Zhouf*)

B–I–6

Najděte všechny možné hodnoty součtu $x + y$, kde reálná čísla x, y splňují rovnost $x^3 + y^3 = 3xy$. (*J. Šimša*)

KATEGORIE C

C–I–1

Je dáno čtyřmístné číslo (v desítkové soustavě). Změnou pořadí jeho číslic lze sestavit právě osm dalších čtyřmístných čísel. Součet nejmenších tří ze všech těchto devíti čísel je 12 528. Určete číslice daného čísla.

(*P. Černek*)

C–I–2

V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblouk AC kružnice, jejíž střed leží na straně AB, protíná stranu CD v bodě M. Dokažte, že přímky AM a BD jsou navzájem kolmé. (*L. Boček, J. Švrček*)

C–I–3

Zjistěte, zda je číslo $19^{1\,998} + 98^{1\,999}$ dělitelné devíti. (*P. Leischner*)

C–I–4

Adam a Bohouš se zúčastnili turnaje hraného systémem každý s každým jednou, v němž každý hráč měl odehrát denně právě jeden zápas. Adam a Bohouš však onemocněli a jako jediní nedokončili turnaj. Bohouš odstoupil o pět dní dříve než Adam. Celkem se odehrálo 350 zápasů. Kolik zápasů odehrál Adam? Hrál s Bohoušem? (*P. Černek*)

C–I–5

Je dán trojúhelník ABC, v němž $|\sphericalangle BAC| = 150°$, $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|AC| = 6\,\mathrm{cm}$. Sestrojte trojúhelník dvojnásobného obsahu, jehož dvě strany jsou shodné s některými dvěma stranami trojúhelníku ABC. Najděte všechna řešení. (*P. Černek*)

C–I–6

Pro libovolnou dvojici reálných čísel a, b splňující vztah $a+b=1$ platí

$$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1} > 2.$$

Jsou-li navíc čísla a, b nezáporná, platí také

$$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1} < 3.$$

Obě tvrzení dokažte. (*P. Leischner, J. Švrček*)

Řešení každého příkladu musí obsahovat popis použitého algoritmu, zdůvodnění jeho správnosti a diskusi o efektivitě zvoleného řešení (tzn. posouzení časových a paměťových nároků programu). V praktických úlohách P–I–1 až P–I–3 je třeba k řešení připojit odladěný program zapsaný v jazyce Pascal nebo C. Program se odevzdává v písemné formě (jeho výpis je tedy součástí řešení) i na disketě, aby bylo možno otestovat jeho funkčnost. Slovní popis řešení musí ovšem být jasný a srozumitelný i bez toho, že by bylo nutno nahlédnout do zdrojového textu programu. V úloze P–I–4 místo výsledného programu napíšete schéma algoritmu.

P–I–1 Kódovací mřížka

Jednou z kódovacích metod pro předávání zpráv je použití kódovací mřížky. Zpráva se s jejím použitím zapisuje do čtvercové tabulky o $2*N$ řádcích a sloupcích. Kódovací mřížka, která má na smluvených místech N^2 výřezů, se položí na tabulku a přes výřezy můžeme zapsat znaky zprávy do řádků shora dolů a v řádku je zapisujeme zleva doprava. Mřížku je možno položit na tabulku ve 4 různých pozicích tak, že ji otočíme vždy o 90° doprava. Každá pozice v tabulce musí být správnou mřížkou odkryta popsaným způsobem přesně jednou.

Napište program `MRIZKA`, který co nejrychleji zjistí, zda předloženou mřížku lze použít jako kódovací.

Vstupní soubor `MRIZKA.IN` obsahuje $2*N+1$ řádků. Na prvním řádku je celé kladné číslo N ($N \leqq 20$). Každý z následujících $2*N$ řádků obsahuje přesně $2*N$ znaků `0` (není výřez) nebo `1` (je výřez) oddělených jednou mezerou. Výstupní soubor `MRIZKA.OUT` bude obsahovat jediný řádek, na kterém bude napsáno `ANO`, představuje-li vstupní soubor kódovací mřížku, v opačném případě na něm bude napsáno `NE`.

Příklad:

```
MRIZKA.IN      MRIZKA.OUT
2              ANO
0 0 1 0
0 1 0 0
0 0 0 0
1 0 1 0
```

(*V. Sedláček*)

P–I–2 Tajemný kryptogram

Popisovaný šifrovací systém vychází z reálného systému používaného za 1. světové války. Po dobytí nepřátelského štábu v něm byla nalezena tabulka č. 1, která měla 7 sloupců a 7 řádků. V jednotlivých políčkách tabulky bylo zapsáno 49 písmen a číslic. Její řádky a sloupce byly pojmenovány písmeny.

	A	**D**	**F**	**G**	**V**	**M**	**X**
A	Z	3	E	N	V	Ó	A
D	Y	É	Ě	Č	Ď	Š	Í
F	D	H	8	2	O	Ř	0
G	J	P	Q	X	7	Ť	G
V	W	R	K	F	Á	Ú	1
M	I	S	U	M	4	Ž	T
X	6	C	9	5	B	Ů	L

Tabulka 1

U tabulky byl proužek papíru s nějakou zašifrovanou zprávou.

`DFAA VMVM AVXF DXDA VGGV FDXG`

Dále byla nalezena tabulka č. 2, o které víte, že v záhlaví mohou být jednotlivé sloupce označeny navzájem různými písmeny z abecedy. Bohužel, spodní část tabulky byla nečitelná, protože byla rozmáčena vodou.

V	**Y**	**H**	**R**	**E**	**J**
V	F	V	D	D	A

Tabulka 2

Pokuste se nalezenou zprávu dešifrovat.

Soutěžní úloha:

1. Určete systém zašifrování a dešifrování.
2. Určete text původní (nezašifrované) zprávy.
3. Způsobuje zašifrování nárůst délky zprávy? Jestliže ano, jaký je faktor nárůstu?
4. Sestavte program, který má v sobě zakódovánu tabulku č. 1. Jeho vstupní data jsou:
   - otevřený (nezašifrovaný) původní text ukončený znakem `#`,
   - záhlaví tabulky č. 2 ukončené rovněž znakem `#` (v našem případě je to řetězec `"VYHREJ#"`,

- výstupem je zašifrovaná zpráva (v našem případě je to řetězec `"DFAA VMVM AVXF DXDA VGGV FDXG"`). (*V. Matyáš*)

P–I–3 Hra se zápalkami

Dva hráči hrají následující hru. Na začátku hry jsou dány tři hromádky zápalek, přičemž na každé hromádce je položen předem pevně určený počet zápalek (hromádka může být i prázdná). Poté se oba hráči střídají ve svých tazích, přičemž začíná první hráč. V jednom tahu si hráč vybere libovolnou hromádku, na které je alespoň jedna zápalka, a odebere z ní nenulový počet zápalek. Hra probíhá tak dlouho, dokud je v alespoň jedné hromádce nenulový počet zápalek. Hráč, který nemá tah, prohrává partii.

Napište program, který pro dané počty zápalek zjistí, zda existuje vítězná strategie pro prvního hráče, a v kladném případě nalezne pro prvního hráče jeho nejlepší počáteční tah.

Vstupem programu bude textový soubor `INPUT.TXT`. Tento soubor bude obsahovat celkem N různých počátečních pozic ($1 \leqq N \leqq 20$). Číslo N bude uvedeno v prvním řádku. V dalších N řádcích bude uvedena vždy trojice čísel a, b, c, která bude vždy označovat počty zápalek na jednotlivých hromádkách. Můžete předpokládat, že čísla a, b, c budou vždy celá a platí $0 \leqq a, b, c \leqq 255$. Výstupem programu bude textový soubor `OUTPUT.TXT`, který bude obsahovat celkem N řádků. Každý řádek bude odpovídat příslušné trojici čísel a, b, c uvedené v souboru `INPUT.TXT`. Tento řádek buď bude obsahovat řetězec `'NE'`, jestliže v dané pozici neexistuje vítězná strategie pro prvního hráče, nebo bude obsahovat trojici čísel x, y, z, která vznikne po provedení nejlepšího počátečního tahu prvního hráče v případě, že pro něj bude existovat vítězná strategie.

Příklad:

INPUT.TXT	OUTPUT.TXT
2	1 0 1
1 6 1	NE
1 1 0	

Poznámka: Existuje algoritmus, který vyřeší úlohu v konstantním čase. (*P. Kaňovský*)

P–I–4 Normální algoritmy Markova

Konečnou množinu symbolů $T = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ nazveme **abecedou**. Prvky množiny T budeme nazývat **znaky** abecedy. Slovem P v abecedě T nazveme každou konečnou posloupnost znaků abecedy T. **Prázdné slovo** budeme označovat symbolem Λ. **Algoritmem** v abecedě T budeme rozumět funkci, jejíž definičním oborem je podmnožina slov v abecedě T a oborem hodnot je opět podmnožina slov v T. Nechť P je slovo v abecedě T. Řekneme, že algoritmus $\mathscr{A}$ je **přípustný** pro slovo P, právě když P je prvkem jeho definičního oboru. Většinu algoritmů je možno rozdělit na nějaké jednodušší kroky. Jeden ze způsobů navrhl v roce 1954 A. A. Markov. Základní operací je substituce jednoho slova za jiné. Výrazy $P \to Q$ a $P \to \cdot Q$, kde P a Q jsou slova v abecedě T, nazýváme **formulemi substituce** v abecedě T. Přitom předpokládáme, že šipka $(\to)$ a tečka $(\cdot)$ nejsou prvky T. Některé ze slov P a Q může být i prázdné. Formuli $P \to Q$ nazýváme **obyčejnou** a formuli $P \to \cdot Q$ nazýváme **koncovou**. Zápisem $P \to (\cdot)Q$ rozumíme buď formuli $P \to Q$, nebo $P \to \cdot Q$. Konečný seznam formulí substituce v abecedě T

$$\begin{cases} P_1 & \to (\cdot)Q_1 \\ P_2 & \to (\cdot)Q_2 \\ & \vdots \\ P_r & \to (\cdot)Q_r \end{cases}$$

nazýváme **schéma algoritmu** $\mathscr{A}$.

Řekneme, že **slovo** W **je obsaženo ve slově** Q, právě když existují taková slova U, V (mohou být i prázdná), že $Q = UWV$. Algoritmus $\mathscr{A}$ pracuje následujícím způsobem. Nechť je dáno slovo P v abecedě T. Ve schématu algoritmu $\mathscr{A}$ najdeme první formuli $P_m \to (\cdot)Q_m$ $(1 \leqq m \leqq r)$ takovou, že P_m je obsaženo v P. Provedeme substituci nejlevějšího výskytu slova P_m na Q_m. Označme R_1 slovo, které je výsledkem této substituce. Můžeme napsat $\mathscr{A}\colon P \vdash R_1$. Je-li $P_m \to \cdot Q_m$ koncová formule substituce, činnost algoritmu $\mathscr{A}$ končí, jeho **hodnotou** je slovo R_1 a píšeme $\mathscr{A}(P) = R_1$. Je-li $P_m \to Q_m$ obyčejná formule substituce, aplikujeme na R_1 stejný postup, který jsme použili na slovo P. Tímto způsobem pokračujeme dále. Dostaneme posloupnost slov $P, R_1, \dots, R_i$ $(i \geqq 1)$. Můžeme psát

$$\mathscr{A}\colon P \vdash R_1, \dots, \vdash R_i \quad \text{nebo též zkráceně} \quad \mathscr{A}\colon P \vdash^* R_i.$$

Jestliže v určitém okamžiku nastane situace, že ani jedno ze slov $P_1, \dots, P_r$ není obsaženo v R_i, potom činnost algoritmu rovněž končí a R_i je hodnotou algoritmu $\mathscr{A}$. Může se ovšem stát, že popsaný postup nikdy nekončí. V takovém případě řekneme, že algoritmus **není přípustný** pro slovo P.

Příklad 1: Nechť $T = \{b, c\}$. Uvažujme schéma

$$\begin{cases} b \to \cdot\Lambda \\ c \to c \end{cases}$$

normálního algoritmu $\mathscr{A}$ pro slovo P v abecedě T.

Výsledek činnosti algoritmu $\mathscr{A}$ je pro P následující:

- Je-li P prázdné slovo, je hodnota algoritmu rovněž prázdné slovo ($\mathscr{A}(\Lambda) = \Lambda$).
- Obsahuje-li P aspoň jeden znak b, potom hodnotou algoritmu je slovo, které vznikne z P vynecháním nejlevějšího výskytu znaku b v P (např. $\mathscr{A}(cbcb) = ccb$).
- Algoritmus není přípustný pro slova neobsahující znaky b.

Příklad 2: Nechť $T = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Uvažujme schéma

$$\begin{cases} a_0 \to \Lambda \\ a_1 \to \Lambda \\ \vdots \\ a_n \to \Lambda \end{cases}$$

Takové schéma zapisujeme zkráceně ve tvaru

$$\{ \quad \xi \to \Lambda \quad (\xi \in T).$$

Při tomto zkráceném zápisu schématu předpokládáme, že odpovídající prvky seznamu mohou být zapsány v libovolném pořadí. Výsledkem algoritmu $\mathscr{A}$ je vždy prázdné slovo. Říkáme též, že $\mathscr{A}$ přepisuje libovolné slovo (v abecedě T) na prázdné slovo. Činnost tohoto algoritmu můžeme zapsat například ve tvaru $\mathscr{A}\colon a_1a_3a_0 \vdash a_1a_3 \vdash a_3 \vdash \Lambda$ nebo $\mathscr{A}\colon a_1a_3a_0 \vdash^* \Lambda$, takže $\mathscr{A}(a_1a_3a_0) = \Lambda$.

Příklad 3: Nechť $T = \{1\}$. Definujme induktivně $\bar{0} = 1$ a $\overline{n+1} = \overline{n}1$, tj. $\bar{1} = 11$, $\bar{2} = 111$ atd. Slova $\bar{n}$ nazveme čísla.

Uvažujme schéma

$$\Lambda \to \cdot 1.$$

Pro libovolné slovo P v T platí zřejmě $\mathscr{A}(P) = 1P$, což můžeme zapsat ve tvaru $\mathscr{A}(\overline{n}) = \overline{n+1}$ pro libovolné přirozené číslo n. (Uvědomte si, že každé slovo P začíná prázdným slovem Λ, tj. $P = \Lambda P$).

Abecedu B nazveme **rozšířením** abecedy T, platí-li $T \subseteq B$. V řadě případů je nutno při konstrukci schématu algoritmu v abecedě T použít mimo znaků abecedy T ještě další pomocné znaky. Pak řekneme, že jsme vytvořili schéma algoritmů **nad abecedou** T (tj. v nějaké abecedě B, která je rozšířením T).

Příklad 4: Nechť $T = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ je abeceda. Pro každé slovo $P = a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_k}$ v T ($k \geqq 0$, $a_{j_i} \in T$, $i = 0, 1, \dots, n$) je slovo

$\check{P} = a_{j_k} \dots a_{j_1} a_{j_0}$ **obrácením** slova P. Sestrojte normální algoritmus $\mathscr{A}$, který pro libovolné slovo P vytvoří jeho obrácení, tj. $\mathscr{A}(P) = \check{P}$.

Uvažujme zkrácené schéma algoritmu v abecedě $B = T \cup \{\alpha, \beta\}$:

$$\left\{ \begin{array}{rlcr} \alpha\alpha & \to \beta & & \text{(a)} \\ \beta\xi & \to \xi\beta & (\xi \in T) & \text{(b)} \\ \beta\alpha & \to \beta & & \text{(c)} \\ \beta & \to \cdot\Lambda & & \text{(d)} \\ \alpha\nu\xi & \to \xi\alpha\nu & (\xi, \nu \in T) & \text{(e)} \\ \Lambda & \to \alpha & & \text{(f)} \end{array} \right.$$

- Na základě formule (f) dostaneme $\mathscr{A}: P \vdash \alpha P$.
- Potom je aplikována v potřebném počtu opakování formule (e): $\mathscr{A}: P \vdash a_{j_1} \alpha a_{j_0} a_{j_2} \dots a_{j_k} \vdash a_{j_1} a_{j_2} \alpha a_{j_0} a_{j_3} \dots a_{j_k} \vdash^* a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k} \alpha a_{j_0}$.
- S opakováním předchozích dvou kroků postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \mathscr{A}: P \vdash^* a_{j_2} a_{j_3} \dots a_{j_k} \alpha a_{j_1} \alpha a_{j_0} \vdash^* \alpha a_{j_k} \alpha a_{j_{k-1}} \dots \alpha a_{j_1} \alpha a_{j_0} \vdash \\ \vdash \alpha\alpha a_{j_k} \alpha a_{j_{k-1}} \dots \alpha a_{j_1} \alpha a_{j_0}. \end{aligned}$$

- S pomocí (a) dále dostaneme $\mathscr{A}: P \vdash^* \beta a_{j_k} \alpha a_{j_{k-1}} \dots \alpha a_{j_1} \alpha a_{j_0}$, pomocí (b) a (c) a s posledním použitím (d) dostaneme $\mathscr{A}(P) = \check{P}$.

Tím jsme popsali činnost normálního algoritmu $\mathscr{A}$ nad abecedou T obracející slovo v abecedě T.

Soutěžní úlohy:

1. Nechť $H = \{1\}$, $M = \{1, *\}$. Každé přirozené číslo n může být zapsáno jako $\bar{n}$, což je slovo v abecedě H (viz př. 3 ve studijním textu). Napište schéma algoritmu $\mathscr{A}$ v M, který je přípustný pouze pro slova, jež jsou zápisem přirozeného čísla. Hodnotou algoritmu $\mathscr{A}$ pro libovolné $\bar{n}$ bude $\mathscr{A}(\bar{n}) = \bar{0}$. Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.
2. Je dána abeceda T, která neobsahuje znaky α, β, γ, $B = T \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Sestrojte schéma algoritmu $\mathscr{A}$ v abecedě B, který každé slovo v abecedě T zdvojí (tj. $\mathscr{A}(P) = PP$). Zdůvodněte jeho správnost.

(*V. Sedláček*)

ÚSTŘEDNÍ VÝBOR MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

48. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Leták kategorií A, B, C a P
Vydala Jednota českých matematiků a fyziků
pro vnitřní potřebu ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR
v 1. vydání
Programem TEX připravil Karel Horák