2008/2009
58. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *Zistite, pre ktoré dvojice kladných celých čísel m a n platí*

$$\sqrt{m^2-4} < 2\sqrt{n} - m < \sqrt{m^2-2}.$$

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Ak prirodzené čísla m, n spĺňajú zadané nerovnosti, tak zrejme

$$m \geqq 2 \qquad \text{a} \qquad 2\sqrt{n} - m > 0 \tag{1}$$

(inak by výraz na ľavej strane zadaných nerovností nebol definovaný, resp. prostredný výraz by nebol väčší ako nezáporný výraz na ľavej strane). Predpokladajme, že podmienky (1) sú splnené. V takom prípade môžeme urobiť na každej z oboch nerovností v jednom stĺpci nasledujúce *ekvivalentné* úpravy (pri každom zo štyroch umocňovaní na druhú sú obe strany dobre definované a nezáporné):

$$\begin{array}{rl|rl}
2\sqrt{n} - m < \sqrt{m^2-2} & \big|^2 & \sqrt{m^2-4} < 2\sqrt{n} - m & \big|^2 \\
4n - 4m\sqrt{n} + m^2 < m^2 - 2 & & m^2 - 4 < 4n - 4m\sqrt{n} + m^2 & \\
n + \frac12 < m\sqrt{n} & \big|^2 & m\sqrt{n} < n + 1 & \big|^2 \\
n^2 + n + \frac14 < m^2 n & \big| : n & m^2 n < n^2 + 2n + 1 & \big| : n \\
n + 1 + \dfrac{1}{4n} < m^2 & & m^2 < n + 2 + \dfrac{1}{n} &
\end{array}$$

Posledné dve nerovnosti platia práve vtedy, keď sa m^2 nachádza v intervale

$$\left(n + 1 + \frac{1}{4n}, n + 2 + \frac{1}{n}\right).$$

Ten vzhľadom na zrejmé nerovnosti $0 < \frac{1}{4n} \leqq \frac14$ a $0 < \frac1n \leqq 1$ obsahuje jediné prirodzené číslo $n+2$. Prirodzené čísla m, n teda spĺňajú výsledné nerovnosti práve vtedy, keď $m^2 = n + 2$.

Ešte treba zistiť, kedy pre $n = m^2 - 2$ platia podmienky (1). Pre $m \geqq 2$ môžeme urobiť nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{m^2-2} - m &> 0,\\
2\sqrt{m^2-2} &> m, \qquad \big|^2\\
4(m^2-2) &> m^2,\\
3m^2 &> 8.
\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť a teda aj podmienky (1) sú pre každé $m \geqq 2$ splnené.

Odpoveď. Hľadané dvojice sú $(m, n) = (m, m^2 - 2)$, kde $m \geqq 2$ je ľubovoľné prirodzené číslo.

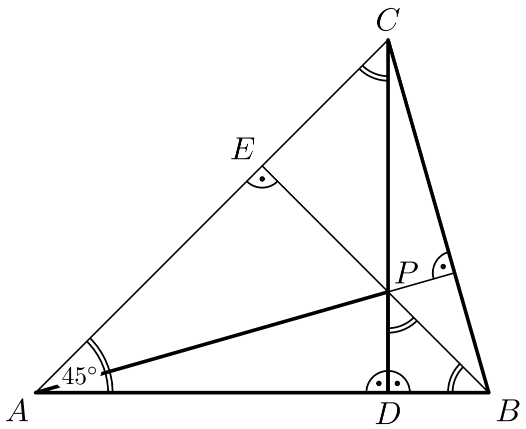
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za nájdenie intervalu pre hodnotu m^2 (či v inej forme vyriešenú sústavu zadaných nerovníc s neznámou m a parametrom n) správnymi dôsledkovými úpravami dajte 2 body, ďalšie 2 body potom dajte za úvahu o celočíselnosti vedúcu ku vzťahu $n = m^2 - 2$; zvyšné 2 body sú za skúšku, pri ktorej je pre nájdené dvojice nutné zdôvodniť platnosť *pôvodných* nerovností, a to vysvetlením, prečo sú urobené úpravy umocnením korektné. Ak pri skúške nie je vylúčená hodnota $m = 1$, strhnite 1 bod.

Ak riešiteľ stanoví všeobecné podmienky, pri ktorých sú všetky urobené úpravy daných nerovností ekvivalentné, tak dajte 5 bodov za odvodenie vzťahu $n = m^2 - 2$ a 1 bod za následné overenie, že pre každé $m \geqq 2$ dvojica $(m, n) = (m, m^2 - 2)$ stanovené podmienky spĺňa.

2. *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom vnútorný uhol pri vrchole A má veľkosť $45°$. Označme D pätu výšky z vrcholu C. Uvažujme ďalej ľubovoľný vnútorný bod P výšky CD. Dokážte tvrdenie: Priamky AP a BC sú navzájom kolmé práve vtedy, keď úsečky AP a BC sú zhodné.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Dokážeme najprv prvú implikáciu. Nech $AP \perp BC$. Potom bod P je priesečníkom výšok trojuholníka ABC. Chceme dokázať, že úsečky AP a BC sú zhodné, preto nájdeme dva zhodné trojuholníky, v ktorých sú tieto úsečky zodpovedajúcimi si stranami.

Označme E priesečník priamky BP so stranou AC, t. j. pätu výšky spustenej z vrcholu B. Z pravouhlého trojuholníka ABE a zadanej veľkosti uhla BAC ľahko dopočítame, že $|\measuredangle PBD| = 45°$. Preto trojuholník PDB je pravouhlý a rovnoramenný, čiže $|DP| = |DB|$. Podobne trojuholník ADC je rovnoramenný a pravouhlý, teda $|DA| = |DC|$. Podľa vety *sus* sú potom pravouhlé trojuholníky APD a CBD zhodné a ich prepony AP, BC majú rovnakú dĺžku (obr. 1).



Obr. 1

Ostáva dokázať druhú implikáciu. Predpokladajme, že $|AP| = |BC|$. Keďže ADC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník, platí $|AD| = |CD|$, z čoho vyplýva, že trojuholníky PAD a BCD sú zhodné podľa vety *Ssu*. Odtiaľ máme $|PD| = |BD|$, z čoho dostávame $|\measuredangle ABP| = 45°$. Označme opäť E priesečník priamky BP so stranou AC. Z trojuholníka ABE jednoducho odvodíme, že uhol BEA je pravý, takže priamka BP je výškou trojuholníka ABC (obr. 1). Preto bod P je priesečník výšok tohto trojuholníka. Z toho vyplýva, že AP je výška na stranu BC, čiže je na ňu kolmá.

Iné riešenie. Ak $AP \perp BC$, je bod P priesečníkom výšok trojuholníka ABC. Označme $|\measuredangle BAC| = \alpha = 45°$. Podobne ako v jednom z riešení druhej úlohy domáceho kola[1] možno odvodiť

$$|AP| = \frac{|BC| \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = |BC| \cdot \operatorname{cotg}\alpha = |BC| \cdot \operatorname{cotg} 45° = |BC|.$$

[1] V uvedenom riešení bola pri štandardnom označení odvodená rovnosť $|CU| = \frac{c|\cos\gamma|}{\sin\gamma}$, kde U je priesečník výšok trojuholníka ABC.

Nech naopak $|AP| = |BC|$. Označme Q priesečník výšok trojuholníka ABC. Z dokázanej prvej implikácie máme $|AQ| = |BC|$. Všetky body úsečky CD majú navzájom rôznu vzdialenosť od bodu A, preto vnútri úsečky CD môže ležať nanajvýš jeden bod P s vlastnosťou $|AP| = |BC|$, a tento bod musí byť totožný s bodom Q.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pritom za úplný dôkaz každej z oboch implikácií udeľte 3 body. Za dôkaz prvej implikácie využívajúci *bez dôkazu* vzťah $|AP| = |BC| \operatorname{cotg} \alpha$ odvodený v domácom kole udeľte 3 body, ak žiak uvedie, že používa vzťah z riešenia domáceho kola, inak dajte 1 bod.

V prípade neúplného dôkazu niektorej z implikácií udeľte body zodpovedajúce tomu, ako ďaleko sa žiak dostal; napríklad za odvodenie rovnosti $|DP| = |DB|$ v prípade prvej implikácie 1 bod, za odvodenie rovnosti $|AD| = |CD|$ tiež 1 bod.

Za zdôvodnené pozorovanie, že trojuholník ADC je rovnoramenný, udeľte 1 bod aj v prípade, že žiak toto pozorovanie nepoužije na úspešný dôkaz ani jednej z implikácií.

---

3. *Určte všetky prirodzené čísla, ktorými možno krátiť niektorý zo zlomkov tvaru*

$$\frac{3p-q}{5p+2q},$$

kde p a q sú nesúdeliteľné celé čísla. (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Aby sa uvedený zlomok dal krátiť prirodzeným číslom d, musí byť d zároveň deliteľom čitateľa aj menovateľa. Predpokladajme teda, že pre nejaké prirodzené číslo d a nesúdeliteľné celé čísla p, q platí $d \mid 3p-q$ a súčasne $d \mid 5p+2q$. Vhodným násobením a sčítaním oboch výrazov dostávame

$$d \mid 2(3p-q)+(5p+2q) = 11p, \qquad \text{a tiež} \qquad d \mid 3(5p+2q)-5(3p-q) = 11q.$$

Takže d je deliteľom oboch čísel $11p$, $11q$ a musí deliť aj číslo[2]

$$\operatorname{nsd}(11p, 11q) = 11 \cdot \operatorname{nsd}(p,q) = 11.$$

Odtiaľ máme $d \in \{1, 11\}$. Uvedený zlomok, ak vôbec, sa teda dá krátiť iba číslom 11 (ak $d = 1$, sotva možno hovoriť o „krátení“). Ľahko nájdeme príklad nesúdeliteľných čísel p, q, pre ktoré sa jedenástimi daný zlomok naozaj dá krátiť. Napr. pre $p = 9$, $q = 5$ platí

$$\frac{3p-q}{5p+2q} = \frac{3 \cdot 9 - 5}{5 \cdot 9 + 2 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 2}{11 \cdot 5} = \frac{2}{5}.$$

Odpoveď. Jediné prirodzené číslo, ktorým sa dá krátiť niektorý z uvedených zlomkov, je 11.

Poznámka. Úvahu, že z vlastností $d \mid 11p$, $d \mid 11q$ a $\operatorname{nsd}(p,q) = 1$ vyplýva $d \in \{1, 11\}$, možno previesť aj inými spôsobmi. Môžeme napríklad rozlíšiť dva prípady: Ak d nie je násobkom jedenástich, tak z $d \mid 11p$, $d \mid 11q$ máme $d \mid p$, $d \mid q$, čiže $d = 1$. Ak $d = 11k$, kde k je prirodzené, tak z $d \mid 11p$, $d \mid 11q$ vyplýva $k \mid p$, $k \mid q$, čiže $k = 1$ a $d = 11$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za prevod na vzťahy $d \mid 3p-q$ a $d \mid 5p+2q$, ďalšie 2 body za odvodenie vzťahov $d \mid 11p$ a $d \mid 11q$, ďalší bod za záver $d = 11$ a zostávajúce 2 body za uvedenie (resp. za dôkaz existencie) vyhovujúceho príkladu dvojice nesúdeliteľných čísel p a q.

---

[2] Využívame známy poznatok, že každý spoločný deliteľ daných dvoch celých čísel a, b je deliteľom ich najväčšieho spoločného deliteľa $\operatorname{nsd}(a,b)$.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.