2018/2019
68. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 24. – 27. 3. 2019.*)

1. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

(*Tomáš Jurík*)

2. Daný je pravouholník $ABCD$, pričom $|AB| = a \geqq b = |BC|$. Na priamke BD zostrojte body P a Q tak, aby platilo $|AP| = |PQ| = |QC|$. Uveďte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na dĺžky a, b. (*Jaroslav Švrček*)

3. Nech a, b, c, n sú kladné celé čísla také, že sú splnené nasledujúce podmienky:
(i) čísla a, b, c, $a + b + c$ sú po dvoch nesúdeliteľné;
(ii) číslo $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$ je n-tou mocninou celého čísla.
Dokážte, že súčin abc sa dá zapísať ako rozdiel dvoch n-tých mocnín celých čísel.
(*Patrik Bak*)

4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Na polpriamke opačnej k polpriamke BC leží bod P taký, že $|AB| = |BP|$. Analogicky na polpriamke opačnej k polpriamke CB leží bod Q taký, že $|AC| = |CQ|$. Označme J stred kružnice pripísanej strane BC daného trojuholníka a D, E postupne jej body dotyku s priamkami AB a AC. Predpokladajme, že polpriamky opačné k polpriamkam DP a EQ sa pretínajú v bode F rôznom od J. Dokážte, že $AF \perp FJ$. (*Patrik Bak*)

5. Dokážte, že existuje nekonečne veľa celých čísel, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare $2^a + 3^b - 5^c$, pričom a, b, c sú nezáporné celé čísla. (*Ján Mazák, Tomáš Bárta*)

6. Pre ktoré prirodzené čísla n možno do tabuľky $n \times n$ vpísať všetky celé čísla od 1 po n^2 tak, aby aritmetický priemer čísel v každom riadku aj stĺpci tabuľky bol celým číslom? (*Laura Vištanová*)