**2009/2010**
**59. ročník MO** *Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9*

---

**1.** *Pani učiteľka potrebovala vymyslieť príklady na rovnice do písomky. Preto si vypísala všetky rovnice tvaru*

$$\heartsuit \cdot x + \clubsuit = 13,$$

*kde $\heartsuit$ a $\clubsuit$ sú jednociferné prirodzené čísla. Zo všetkých rovníc vybrala tie, ktorých koreň bol 3. V písomke dala do každej skupiny jednu z nich. Koľko najviac skupín mohla mať?* (*K. Pazourek*)

**Riešenie.** Vieme, že $x = 3$ je riešením uvedenej rovnice, preto platí rovnosť

$$\heartsuit \cdot 3 + \clubsuit = 13.$$

Aby $\heartsuit$, $\clubsuit$ boli prirodzené čísla, musí $\heartsuit$ byť 1, 2, 3 alebo 4 (pre $\heartsuit = 5$ dostávame $5 \cdot 3 = 15 > 13$ a $\clubsuit$ by muselo byť záporné, čo nie je možné). Teraz dosadíme jednotlivé hodnoty $\heartsuit$ do rovnice a dopočítame príslušné $\clubsuit$:

- $\heartsuit = 1$, $\clubsuit = 10$,
- $\heartsuit = 2$, $\clubsuit = 7$,
- $\heartsuit = 3$, $\clubsuit = 4$,
- $\heartsuit = 4$, $\clubsuit = 1$.

Vidíme, že podmienkam zo zadania nevyhovuje prípad $\heartsuit = 1$, $\clubsuit = 10$. Existujú teda práve tri dvojice $(\heartsuit, \clubsuit)$, ktoré vyhovujú zadaniu: $(2, 7)$, $(3, 4)$ a $(4, 1)$. Pani učiteľka tak mohla mať najviac tri skupiny.

*Návrh hodnotenia.* 1 bod za dosadenie koreňa do rovnice; 2 body za nájdenie všetkých troch riešení; 3 body za zdôvodnenie, prečo riešení nie je viac.

---

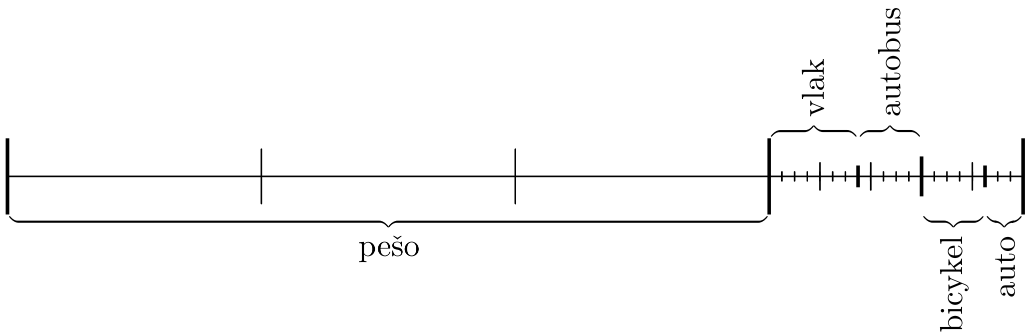
**2.** *Počet domácich a dochádzajúcich žiakov školy je v pomere $3 : 1$. Domáci chodia pešo. U dochádzajúcich je pomer počtu tých, čo využívajú verejnú dopravu, a tých, čo jazdia sami na bicykli alebo s rodičmi autom, $3 : 2$. U verejnej dopravy je pomer tých, čo jazdia vlakom, a tých, čo autobusom, $7 : 5$. Ďalej vieme, že pomer tých, čo dochádzajú na bicykli, k počtu tých, ktorých vozia rodičia autom, je $5 : 3$. O koľko viac žiakov dochádza vlakom ako vozia rodičia, keď verejnou dopravou ich dochádza 24? Koľko je žiakov školy?* (*M. Volfová*)

**Riešenie.** Tých, ktorí chodia verejnou dopravou, je 24 a tvoria 3 diely z počtu dochádzajúcich. Zvyšné 2 diely, ktoré prislúchajú neverejnej doprave, teda zodpovedajú 16 žiakom ($\frac{2}{3}$ z 24 je 16). Všetkých dochádzajúcich je $24 + 16 = 40$. Dochádzajúci tvoria 1 diel zo všetkých žiakov školy, domácich je trikrát viac, t. j. 120. Všetkých žiakov je teda $40 + 120 = 160$.

24 detí dochádzajúcich verejnou dopravou je rozdelených na cestujúcich vlakom (7 dielov) a autobusom (5 dielov); vlakom teda chodí 14 detí ($\frac{7}{12}$ z 24 je 14) a autobusom 10 ($\frac{5}{12}$ z 24 je 10). 16 žiakov, ktorí chodia neverejnou dopravou, sa delí na tých, ktorí chodia na bicykli (5 dielov), a tých, ktorých vozia rodičia (3 diely); na bicykli teda dochádza 10 detí ($\frac{5}{8}$ z 16 je 10), s rodičmi autom 6 ($\frac{3}{8}$ z 16 je 6).

*Záver.* Škola má celkom 160 žiakov, pričom žiakov, ktorí dochádzajú vlakom, je o 8 viac ako žiakov, ktorých vozia rodičia autom $(14 - 6 = 8)$.

**Iné riešenie.** Načrtneme úsečku predstavujúcu všetkých žiakov školy a budeme ju rozdeľovať podľa zadaných pomerov ako na obr. 1.




Obr. 1

Okrem pomerov je v zadaní jediný číselný údaj: vlakom a autobusom chodí celkom 24 žiakov. Z obrázku vyvodíme, že dochádzajúcich žiakov je $\frac{5}{3} \cdot 24 = 40$ a všetkých žiakov je $4 \cdot 40 = 160$.

Najmenšie dieliky, na ktoré je rozdelená časť úsečky zodpovedajúca verejnej doprave, predstavujú $24 : 12 = 2$ žiakov. Aj časť úsečky zodpovedajúca neverejnej doprave je rozdelená na takto veľké dieliky – dieliky sú rovnaké, pretože raz znázorňujú dvanástinu troch dielov, raz osminu dvoch dielov a $\frac{3}{12} = \frac{2}{8}$. Časť úsečky zodpovedajúca vlaku je o 4 takéto dieliky väčšia ako časť zodpovedajúca autu. Vlakom teda do školy cestuje o $4 \cdot 2 = 8$ žiakov viac ako autom.

*Návrh hodnotenia.* 3 body za celkový počet žiakov; 3 body za rozdiel medzi počtami žiakov dochádzajúcich vlakom a autom.

---

**3.** *Dostali sme kocku, ktorá mala dĺžku hrany vyjadrenú v centimetroch celým číslom väčším ako* 2. *Všetky jej steny sme nafarbili na žlto a potom sme ju rozrezali bezo zvyšku na kocôčky s hranou dĺžky* 1 cm. *Tieto kocôčky sme roztriedili na štyri kôpky. Na prvej boli kocôčky s jednou žltou stenou, na druhej s dvomi žltými stenami a na tretej s tromi. Na štvrtej kôpke potom boli kocôčky bez žltej steny. Určte dĺžku hrany pôvodnej kocky, ak viete, že aspoň jedno z nasledujúcich tvrdení je pravdivé:*

- *Počty kocôčok v prvej a štvrtej kôpke boli v pomere* 4 : 9.
- *Na prvej kôpke bolo trikrát viac kocôčok ako na druhej.*

(*L. Šimůnek*)

**Riešenie.** Dĺžku hrany pôvodnej kocky v centimetroch označíme $a + 2$, pričom $a$ je prirodzené číslo. Každej stene pôvodnej kocky zodpovedá $a^2$ kocôčok s práve jednou zafarbenou stenou, preto je takých kocôčok celkom $6a^2$. Na každej hrane pôvodnej kocky sme dostali $a$ kocôčok s práve dvoma zafarbenými stenami. Pôvodná kocka mala 12 hrán, preto je takých kocôčok celkom $12a$. Kocôčok, ktoré nemajú žiadnu zafarbenú stenu, je $a^3$.

Prvé tvrdenie v zadaní vyjadruje táto rovnica:

$$\frac{6a^2}{a^3} = \frac{4}{9}.$$

Po skrátení zlomku nenulovým výrazom $a^2$ dostaneme

$$\frac{6}{a} = \frac{4}{9},$$

teda $a = 13{,}5$. Zadanie úlohy predpokladá celočíselnú dĺžku hrany kocky, tu však dĺžka hrany vychádza $13{,}5 + 2 = 15{,}5\,(\mathrm{cm})$. Vidíme, že uvedený pomer počtu kocôčok nemôžeme po rozrezaní žiadnej kocky nikdy dostať.

Prvé tvrdenie zo zadania nie je pravdivé, musí teda platiť druhé, ktoré je vyjadrené rovnicou

$$\frac{6a^2}{12a} = \frac{3}{1}.$$

Po skrátení zlomku nenulovým výrazom $6a$ dostaneme

$$\frac{a}{2} = \frac{3}{1},$$

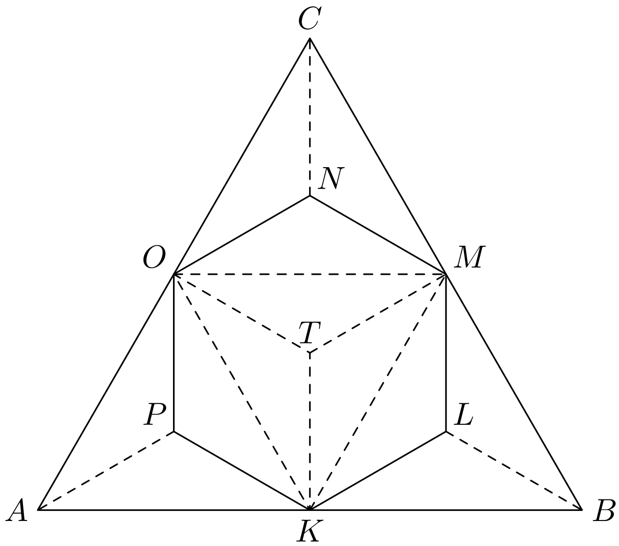
teda $a = 6$. Dĺžka hrany pôvodnej kocky bola $6 + 2 = 8\,(\mathrm{cm})$.

*Návrh hodnotenia.* 3 body za vyjadrenie počtu kocôčok v prvej, druhej a štvrtej kôpke; 2 body za dĺžky hrán podľa prvého a druhého tvrdenia; 1 bod za správny záver.

---

**4.** *V rovnostrannom trojuholníku $ABC$ leží pravidelný šesťuholník $KLMNOP$ tak, že body $K$, $M$, $O$ sú postupne stredmi strán $AB$, $BC$ a $AC$. Vypočítajte obsah šesťuholníka $KLMNOP$, ak obsah trojuholníka $ABC$ je $60\,\mathrm{cm}^2$.* (K. Pazourek)

**Riešenie.** Narysujme šesťuholník $KLMNOP$ do trojuholníka $ABC$ predpísaným spôsobom (obr. 2).




Obr. 2

Vzhľadom na to, že oba útvary ako celok sú osovo súmerne podľa troch osí súmernosti, leží ťažisko šesťuholníka a ťažisko trojuholníka v jednom bode, ktorý označíme $T$. Stredné priečky trojuholníka $ABC$ spolu s úsečkami $KT$, $MT$ a $OT$ rozdeľujú šesťuholník $KLMNOP$ na šesť zhodných rovnoramenných trojuholníkov – pre zdôvodnenie tohto tvrdenia si stačí uvedomiť zhodnosť príslušných strán týchto trojuholníkov.

Ďalej aj ostávajúce časti trojuholníka $ABC$ môžeme rozdeliť na šesť trojuholníkov zhodných s predchádzajúcimi šiestimi trojuholníkmi. Ako možné zdôvodnenie tohto tvrdenia dokážeme zhodnosť trojuholníkov $PKO$ a $PKA$ podľa vety *sus*: Stranu $PK$

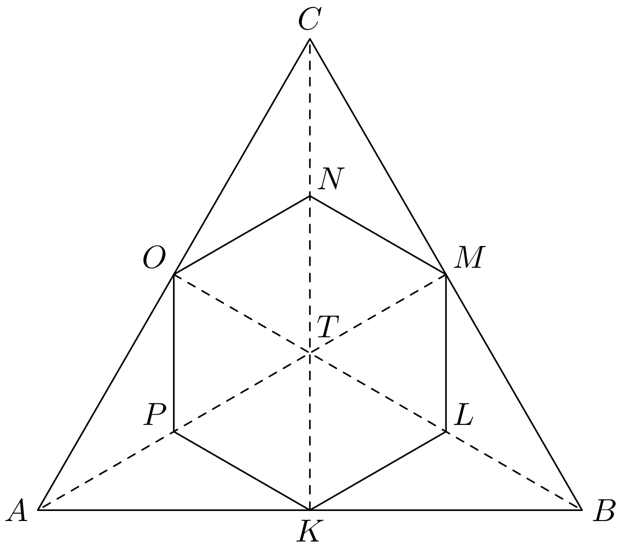
majú oba trojuholníky spoločnú. Strany $KO$ a $KA$ majú rovnakú dĺžku, pretože jedna z nich je stredná priečka rovnostranného trojuholníka $ABC$ a druhá je polovica jeho strany. Uhol $PKO$ je štvrtinou vnútorného uhla $PKL$ pravidelného šesťuholníka $KLMNOP$, a tak meria $30°$. Uhol $PKA$ je spolu s uhlom $LKB$ doplnkom uhla $PKL$ do priameho uhla, a preto tiež meria $30°$.

Vďaka rozdeleniu trojuholníka $ABC$ na týchto dvanásť zhodných trojuholníkov vidíme, že pomer obsahov šesťuholníka $KLMNOP$ a trojuholníka $ABC$ je $6 : 12 = 1 : 2$, teda obsah šesťuholníka $KLMNOP$ je

$$S = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30\,(\mathrm{cm}^2).$$

*Návrh hodnotenia.* 1 bod za rozdelenie šesťuholníka na vyššie uvedené trojuholníky a zdôvodnenie ich vzájomnej zhodnosti; 3 body za akékoľvek zdôvodnenie, že zvyšné trojuholníky tvoriace trojuholník $ABC$ sú s predchádzajúcimi zhodne; 1 bod za porovnanie obsahov oboch zadaných útvarov; 1 bod za výsledok.

**Iné riešenie.** Zostrojme šesťuholník $KLMNOP$ v trojuholníku $ABC$ predpísaným spôsobom.




Obr. 3

Vzhľadom na to, že oba útvary ako celok sú osovo súmerné podľa troch osí súmernosti, leží ťažisko šesťuholníka a ťažisko trojuholníka v jednom bode, ktorý označíme $T$. Na obr. 3 potom vidíme, že pravidelný šesťuholník $KLMNOP$ sa skladá zo šiestich zhodných trojuholníkov a zvyšná časť trojuholníka $ABC$ sa skladá zo šiestich iných zhodných trojuholníkov. Dokážeme, že tieto trojuholníky majú s predchádzajúcimi rovnaký obsah, a to na príklade trojuholníkov $NTO$ a $CNO$:

Úsečka $KC$ je ťažnica trojuholníka $ABC$. Z vlastností ťažiska a ťažníc vyplýva, že $|TC| = 2 \cdot |KT|$. Ďalej v pravidelnom šesťuholníku $KLMNOP$ platí $|NT| = |KT|$. Teraz je už zrejmé, že $|CN| = |NT|$. Trojuholníky $NTO$ a $CNO$ majú teda rovnako veľké strany $NT$ a $CN$ a zhodujú sa aj v príslušnej výške, preto musia mať rovnaký obsah.

Vďaka rozdeleniu trojuholníka $ABC$ na dvanásť trojuholníkov s rovnakým obsahom vidíme, že pomer obsahov šesťuholníka $KLMNOP$ a trojuholníka $ABC$ je $6 : : 12 = 1 : 2$, teda obsah šesťuholníka $KLMNOP$ je

$$S = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30\,(\mathrm{cm}^2).$$

*Návrh hodnotenia.* 2 body za vysvetlenie, že $|CN| = |NT|$; 2 body za vysvetlenie, že trojuholníky $NTO$ a $CNO$ majú rovnaké obsahy; 1 bod za porovnanie obsahov oboch zadaných útvarov; 1 bod za výsledok.

**Iné riešenie.** Vzhľadom na to, že oba útvary ako celok sú osovo súmerné podľa troch osí súmernosti, leží ťažisko šesťuholníka a ťažisko trojuholníka v jednom bode, ktorý označíme $T$. Úsečka $KC$ je ťažnica trojuholníka $ABC$ a $KT$ jej tretina. Označme $b$ dĺžku strany trojuholníka $ABC$. Z Pytagorovej vety použitej pre pravouhlý trojuholník $KBC$ potom vyplýva

$$|KT| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}b.$$

Keďže šesťuholník $KLMNOP$ sa skladá zo šiestich zhodných rovnostranných trojuholníkov s dĺžkou strany $|KT|$, je jeho obsah

$$S_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{36}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}b^2.$$

Obsah trojuholníka $ABC$ je $S_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}b^2$. Porovnaním $S_1$ a $S_2$ dostaneme, že obsah šesťuholníka $KLMNOP$ je polovičný oproti obsahu trojuholníka $ABC$, teda je rovný $30\,\mathrm{cm}^2$.

*Návrh hodnotenia.* 1 bod za vysvetlenie, že $KT$ je tretina $KC$; 1 bod za vyjadrenie obsahu trojuholníka $ABC$; 2 body za vyjadrenie obsahu šesťuholníka pomocou rovnakej neznámej; 1 bod za pomer obsahov oboch útvarov alebo analogický poznatok; 1 bod za výsledok.

*Poznámka.* Na základe posledného uvedeného riešenia a vďaka zadanému obsahu trojuholníka $ABC$ môžu žiaci postupne vypočítať $b \doteq 11{,}8\,\mathrm{cm}$, $|KT| \doteq 3{,}4\,\mathrm{cm}$ a $S_2 \doteq \doteq 30{,}0\,\mathrm{cm}^2$. Aj také riešenie možno ohodnotiť plným počtom bodov, ak je aj zdôvodnenie v poriadku.

*Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.*