68. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Celoštátne kolo kategórie A

24. – 27. marec 2019

Bardejov

1. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu*

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= |y - z| + 1,\\ y^2 - zx &= |z - x| + 1,\\ z^2 - xy &= |x - y| + 1. \end{aligned}$$

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Daná sústava rovníc je symetrická, takže stačí hľadať iba tie riešenia, ktoré spĺňajú nerovnosti $x \geqq y \geqq z$. Za tohto predpokladu môžeme odstrániť absolútne hodnoty, a tak dostaneme

$$x^2 - yz = y - z + 1, \tag{1}$$
$$y^2 - zx = x - z + 1, \tag{2}$$
$$z^2 - xy = x - y + 1. \tag{3}$$

Postupným odčítaním rovníc (1) a (2), resp. (2) a (3) dostávame po jednoduchých úpravách rovnice

$$\begin{aligned} (x - y)(x + y + z + 1) &= 0,\\ (y - z)(x + y + z - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že všetky tri čísla x, y, z nemôžu byť navzájom rôzne, nemôžu však byť ani všetky rovnaké, keďže to by sme v pôvodných rovniciach dostali $0 = 1$. Práve dve z nich sú teda rôzne, takže platí buď $x = y > z$ a $x + y + z = 1$, alebo $x > y = z$ a $x + y + z = -1$.

Všimnime si, že trojica (x, y, z) vyhovuje pôvodnej sústave práve vtedy, keď jej vyhovuje „opačná“ trojica $(-z, -y, -x)$. Prechod k opačnej trojici nemení zavedené usporiadanie čísel v trojici a prevádza druhý prípad z predchádzajúceho odseku na prvý z nich.

Stačí preto vyriešiť prvý prípad, keď $x = y > z$ a $x+y+z = 1$. To dáva $z = 1 - 2x$. Dosadením napríklad do rovnice (1) dostaneme po úprave $x(3x - 4) = 0$, takže $x = 0$ alebo $x = \frac{4}{3}$. Tomu zodpovedajú trojice (x, y, z) rovné $(0, 0, 1)$ a $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. Prvá trojica zrejme nespĺňa predpoklad $x \geqq y \geqq z$, a tak pôvodnej sústave vyhovuje iba druhá trojica (skúška pri uvedenom postupe nie je nutná).

S prihliadnutím na zmeny poradia neznámych a prechody na opačné trojice má sústava 6 riešení:

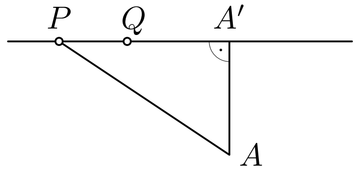
$$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right), \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right),$$
$$\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

2. *Daný je pravouholník $ABCD$, pričom $|AB| = a \geqq b = |BC|$. Na priamke BD zostrojte body P a Q tak, aby platilo $|AP| = |PQ| = |QC|$. Uveďte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na dĺžky a, b.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Všimnime si najskôr, že sa ani zadanie úlohy bez podmienky $a \geqq b$, ani množina dvojíc bodov (P, Q), ktoré sú jej riešeniami, nezmení, keď navzájom vymeníme označenie vrcholov B a D. Podmienku $a \geqq b$ preto uplatníme až pre jednoduchší zápis záverečnej diskusie o počte riešení.

Označme A' a C' kolmé priemety bodov A a C na priamku BD. Zrejme oba priemety padnú dovnútra úsečky BD a platí $|AA'| = |CC'|$. Predpokladajme, že body P a Q majú požadované vlastnosti. Keďže $|AP| = |CQ|$, je $P = A'$ práve vtedy, keď $Q = C'$. Ak nastane táto situácia, budú body P, Q (ako body A', C') súmerne združené podľa stredu S úsečky BD. To isté bude o bodoch P, Q platiť aj v prípade, keď $A' = C'$ $(= S)$ – vtedy sú pravouhlé trojuholníky APS, CQS zhodné podľa vety Ssu, takže $|PS| = |QS|$, pričom nemôže byť $P = Q$.

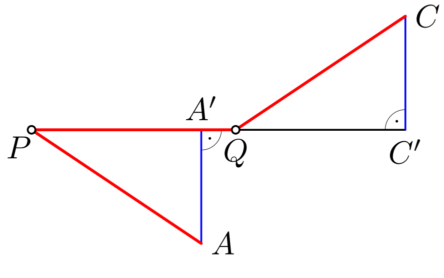
Tieto „symetrické“ prípady $P = A'$, $Q = C'$, $A' = C'$ teda z ďalšieho *rozboru* vylúčime. Práve tak vylúčime aj možnosť, že by bod Q ležal na úsečke $A'P$, keďže by potom podľa obr. 1 platilo $|AP| > |A'P| \geqq |PQ|$, čo odporuje požiadavkám úlohy. A symetricky ani bod P nemôže ležať na úsečke QC'. V rozbore opakovane využijeme rovnosť $|A'P| = |C'Q|$, ktorá vyplýva z trojuholníkov $A'PA$ a $C'QC$, ktoré sa zhodujú podľa vety Ssu.



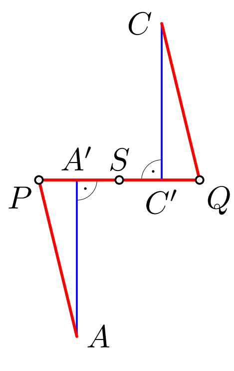
Obr. 1

Za predpokladov $P \neq A'$, $Q \neq C'$, $A' \neq C'$, $Q \notin A'P$ a $P \notin C'Q$ rozlíšime možné polohy bodov P, Q na priamke $A'C'$ nasledovne:

1. P leží na polpriamke opačnej k polpriamke $A'C'$:
   a) Q leží na úsečke $A'C'$ (obr. 2). Potom z $|A'P| = |C'Q|$ máme $|PQ| = |A'C'|$, takže $|AP| = |A'C'|$.
   b) Q leží na polpriamke opačnej k polpriamke $C'P$ (obr. 3). Vtedy z $|A'P| = |C'Q|$ máme, že body P, Q sú súmerne združené podľa stredu S úsečky $A'C'$, čiže stredu uhlopriečky BD.

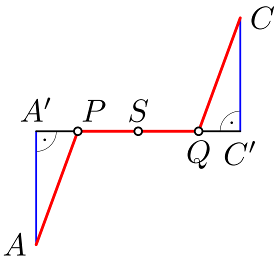


Obr. 2

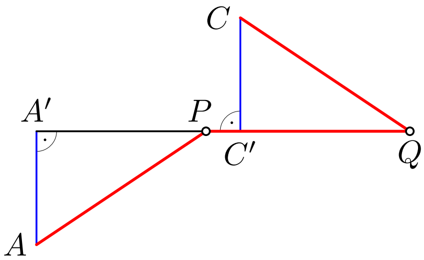


Obr. 3

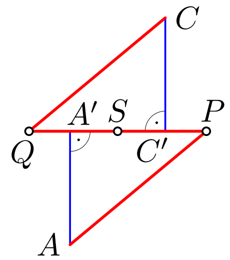
2. P leží na úsečke $A'C'$:
   a) Q leží na úsečke $C'P$ (obr. 4). Vtedy podobne ako v prípade 1b máme, že body P, Q sú súmerne združené podľa stredu S uhlopriečky BD.
   b) Q leží na polpriamke opačnej k polpriamke $C'P$ (obr. 5). Vtedy podobne ako v prípade 1a máme $|AP| = |A'C'|$.



Obr. 4



Obr. 5

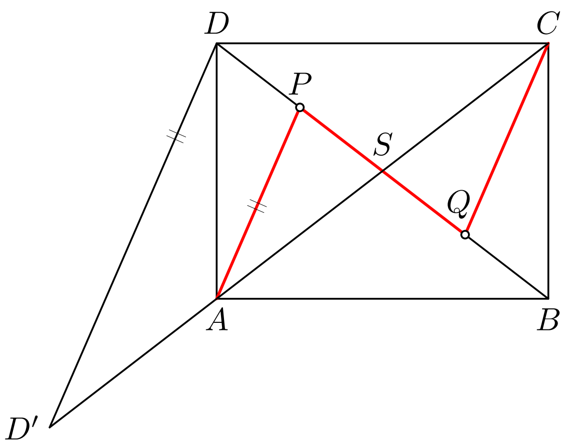


Obr. 6

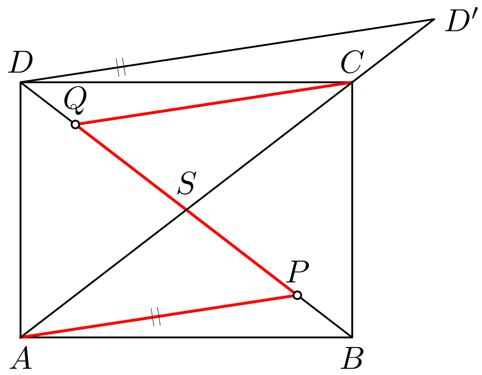
3. P leží na polpriamke opačnej k polpriamke $C'A'$:
   Bod Q potom musí ležať na polpriamke opačnej k polpriamke $A'C'$ (obr. 6). Podobne ako v prípade 1b tak máme, že body P, Q sú súmerne združené podľa stredu S uhlopriečky BD.

Dokázali sme, že buď sú body P, Q súmerne združené podľa stredu S, alebo platí $|AP| = |A'C'|$. Opíšeme najskôr *konštrukciu* v prvom prípade, ktorý zahŕňa aj situácie, keď $P = A'$, $Q = C'$ alebo $A' = C'$, ktoré sme na úvod z nášho rozboru vylúčili. Vtedy platí $|AP| = |PQ| = 2|PS|$. Naopak, ak niektorý bod P priamky BD bude spĺňať rovnosť $|AP| = 2|PS|$, tak k nemu jednoznačne zostrojíme bod Q súmerne združený podľa stredu S, pričom bude platiť $|AP| = |PQ| = |QC|$. Zameriame sa teda na konštrukciu bodu P.

Označme D' priesečník priamky AC a rovnobežky s AP bodom D. Trojuholníky SPA a SDD' sú rovnoľahlé so stredom S. Keďže $|AP| = 2|PS|$, je $|DD'| = 2|DS|$. Z toho už vyplýva konštrukcia, v ktorej najskôr zostrojíme bod D'. Také body sú vždy dva, pričom jeden leží na polpriamke SA (obr. 7) a druhý na polpriamke SC (obr. 8). Následne zostrojíme bod P ako priesečník rovnobežky bodom A s priamkou DD'. Keďže máme dve možné polohy bodu D', budeme mať dve možné polohy bodu P, a tak v tomto prípade budú existovať vždy práve dve riešenia.

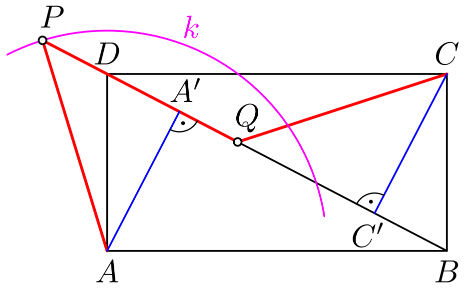


Obr. 7

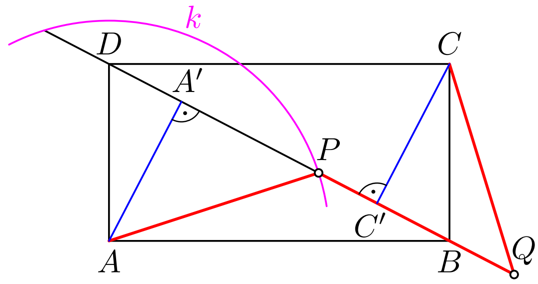


Obr. 8

V druhom prípade $|AP| = |A'C'|$ môžeme už predpokladať, že $A' \neq C'$. Podľa rovnosti $|AP| = |A'C'|$ ľahko nájdeme bod P ako priesečník priamky BD s kružnicou $k(A, |A'C'|)$. V prípade $|A'C'| > |AA'|$ dostaneme dva priesečníky, čiže dve riešenia, v prípade $|A'C'| = |AA'|$ jedno riešenie a napokon žiadne riešenie v prípade $|A'C'| < |AA'|$. Možné riešenia zodpovedajú prípadu 1a (obr. 9), resp. 2b (obr. 10). V oboch z nich je poloha bodu Q určená jednoznačne a ľahko spätne ukážeme, že platí $|AP| = |PQ| = |QC|$.

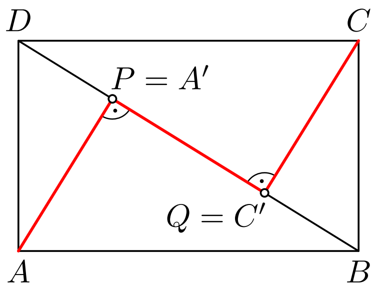


Obr. 9

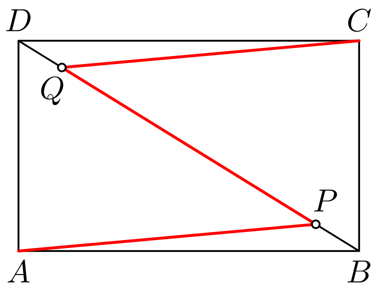


Obr. 10

Posúdime teraz, kedy niektoré riešenia z prvého a druhého prípadu splývajú. Ak majú body P, Q súmerne združené podľa stredu S navyše spĺňať aj podmienku $|PQ| = |AP| = |A'C'|$, stane sa tak jedine v situácii, keď $\{P, Q\} = \{A', C'\}$. Tá je zrejme možná, iba keď $P = A'$ a $Q = C'$, čo vedie k rovnosti $|A'C'| = |AA'|$. Tá však znamená práve to, že kružnica k sa dotýka priamky BD v bode A', a preto (jediné) riešenie z druhého prípadu splýva s tým z dvoch riešení prvého prípadu, pri ktorom $P = A'$. Úloha potom má celkom dve riešenia (obr. 11 a 12).



Obr. 11



Obr. 12

Zistili sme, že počet riešení z druhého prípadu, rovnako ako splynutie jediného jeho riešenia s jedným riešením prvého prípadu, závisí od pomeru $|A'C'| : |AA'|$, ktorý stačí vyjadriť pomocou pomeru $p = a : b$ iba v prípade, keď $a \geqq b$, čiže $p \geqq 1$. Podľa Euklidovej vety o odvesne platí $|DA'| = b^2/|BD| \leqq a^2/|BD| = |DC'|$, odkiaľ $|A'C'| = (a^2 - b^2)/|BD|$. Ďalej $|AA'| = 2S_{ABD}/|BD| = ab/|BD|$, takže

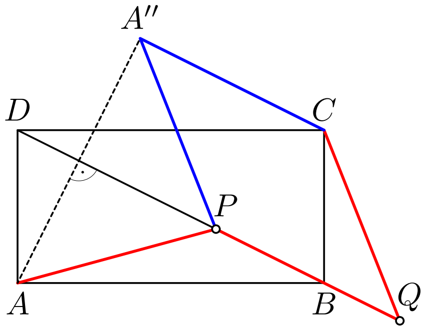
$$|A'C'| : |AA'| = \frac{a^2 - b^2}{ab} = p - \frac{1}{p}.$$

Pritom $p - 1/p \geqq 1$ práve vtedy, keď $p \geqq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, čo je hodnota takzvaného *zlatého rezu* označovaného φ. Výsledky možno zhrnúť takto:

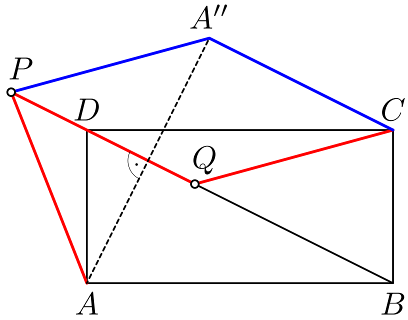
$$\frac{a}{b} > \varphi\colon\ 4 \text{ riešenia}, \qquad 1 \leqq \frac{a}{b} \leqq \varphi\colon\ 2 \text{ riešenia}.$$

Poznámka 1. Namiesto skúmania dĺžok na priamke $A'C'$ sme mohli skúmať uhly. Vďaka zhodnosti trojuholníkov APA', CQC' totiž platí $|\measuredangle APQ| = |\measuredangle CQP|$ alebo $|\measuredangle APQ| + |\measuredangle CQP| = 180°$. Pomocou toho sa dá vyšetriť, že v prípadoch 1b, 2a, 3 tvoria body

A, C, P, Q rovnobežník s uhlopriečkami AC, PQ, takže P, Q sú súmerne združené podľa stredu S. Ďalej v prípadoch 1a (obr. 13) a 2b (obr. 14) môžeme definovať A'' ako obraz bodu A v osovej súmernosti podľa priamky BD a dokázať, že body A'', P, Q, C tvoria kosoštvorec, v ktorom $|A''P| = |A''C|$, čo už dáva návod, ako zostrojiť bod P.

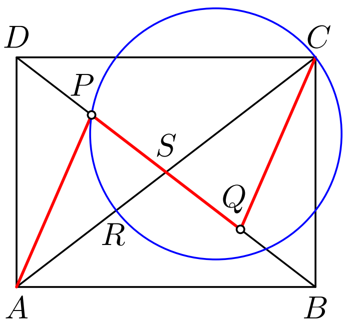


Obr. 13

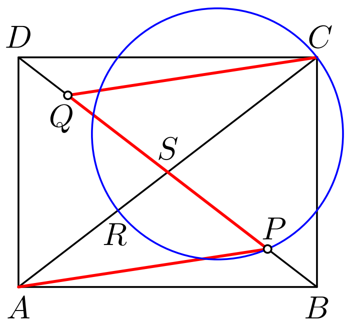


Obr. 14

Poznámka 2. Konštrukciu v symetrickom prípade sme mohli spraviť aj pomocou *Apollóniovej kružnice.* Hľadáme množinu bodov P takých, že $|AP| = 2|PS|$. Zostrojíme teda bod R na úsečke AS taký, že $|AR| = 2|RS|$. Ďalej platí $|AC| = 2|SC|$. Je známe, že hľadaná množina bodov je kružnica nad priemerom RC. Táto kružnica pretína polpriamku SD v jednom bode (obr. 15) a polpriamku SB v druhom bode (obr. 16).



Obr. 15



Obr. 16

---

3. *Nech a, b, c, n sú kladné celé čísla také, že sú splnené nasledujúce podmienky:*

(i) čísla a, b, c, $a+b+c$ sú po dvoch nesúdeliteľné;

(ii) číslo $(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)(ab+bc+ca)$ je n-tou mocninou celého čísla.

Dokážte, že súčin abc sa dá zapísať ako rozdiel dvoch n-tých mocnín celých čísel.

(Patrik Bak)

Riešenie. Dokážeme, že čísla $A = (a+b+c)(ab+bc+ca)$ a $B = (a+b)(b+c)(c+a)$ sú nesúdeliteľné. Predpokladajme, že to tak nie je. Potom existuje prvočíslo p, ktoré delí obe čísla A, B. Keďže $p \mid B$, tak p delí aspoň jedno z čísel $a+b$, $b+c$, $c+a$. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to $a+b$. Potom ale nemôže platiť $p \mid a+b+c$, lebo by bolo $p \mid c$, čo je v spore s predpokladom (i). Nutne teda $p \mid ab+bc+ca = ab+c(a+b)$, z čoho vyplýva $p \mid ab$, takže p delí aspoň jedno z čísel a, b, čo spolu s reláciou $p \mid a+b$ znamená, že delí obe čísla a, b, čo je opäť v spore s (i).

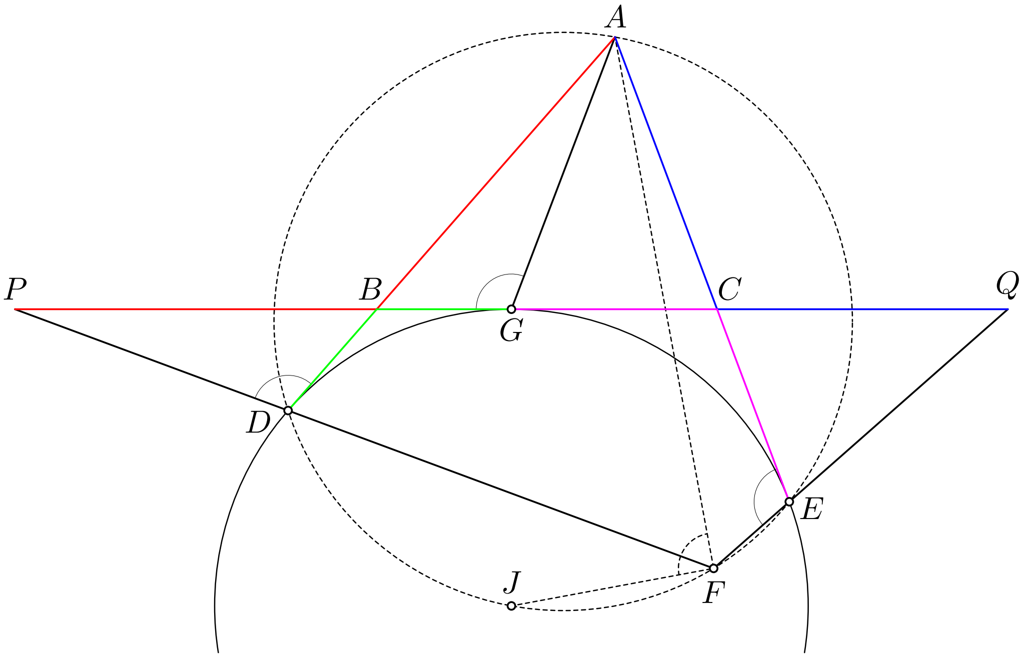
Čísla A, B sú teda naozaj nesúdeliteľné a navyše ich súčin AB je podľa predpokladu (ii) n-tá mocnina celého čísla. Preto musí aj každé z čísel A, B byť n-tou mocninou celého čísla. Lenže $abc = A - B$, takže je to naozaj rozdiel dvoch n-tých mocnín celých čísel. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Poznámka. Trojica $(a, b, c) = (341, 447, 1235)$ vyhovuje zadaniu pre $n = 2$.

---

4. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Na polpriamke opačnej k polpriamke BC leží bod P taký, že $|AB| = |BP|$. Analogicky na polpriamke opačnej k polpriamke CB leží bod Q taký, že $|AC| = |CQ|$. Označme J stred kružnice pripísanej strane BC daného trojuholníka a D, E postupne jej body dotyku s priamkami AB a AC. Predpokladajme, že polpriamky opačné k polpriamkam DP a EQ sa pretínajú v bode F rôznom od J. Dokážte, že $AF \perp FJ$.* (Patrik Bak)

Riešenie. Keďže body A, D, E, J ležia na kružnici s priemerom AJ, stačí na dôkaz kolmosti $AF \perp FJ$ overiť, že na tejto kružnici leží aj bod F (obr. 17). Nech G je dotykový bod uvažovanej pripísanej kružnice so stranou BC. Potom z rovností $|AB| = |BP|$ a $|BD| = |BG|$ vyplýva zhodnosť trojuholníkov $ABG \cong PBD$ (*sus*) a podobne z rovností $|AC| = |CQ|$ a $|CE| = |CG|$ zhodnosť $ACG \cong QCE$. Postupne tak dostávame $|\measuredangle AEF| = 180° - |\measuredangle CEQ| = 180° - |\measuredangle CGA| = |\measuredangle BGA| = |\measuredangle BDP| = |\measuredangle ADP|$. Odtiaľ $|\measuredangle AEF| + |\measuredangle ADF| = 180°$, čo už znamená, že bod F leží s bodmi A, E, D na jednej kružnici, ako sme potrebovali dokázať.



Obr. 17

Poznámka. Potrebný záver, že štvoruholník $ADFE$ je tetivový, možno odvodiť, ako teraz ukážeme, aj pomocou druhej dvojice jeho protiľahlých vnútorných uhlov pri vrcholoch A a F. Zo zhodnosti trojuholníkov $ABG \cong PBD$ a $ACG \cong QCE$ vyplýva, že $|\measuredangle DAE| = |\measuredangle BAC| = |\measuredangle BAG| + |\measuredangle GAC| = |\measuredangle BPD| + |\measuredangle CQE| = |\measuredangle QPF| + |\measuredangle PQF| = 180° - |\measuredangle PFQ| = 180° - |\measuredangle DFE|$, čiže $|\measuredangle DAE| + |\measuredangle DFE| = 180°$.

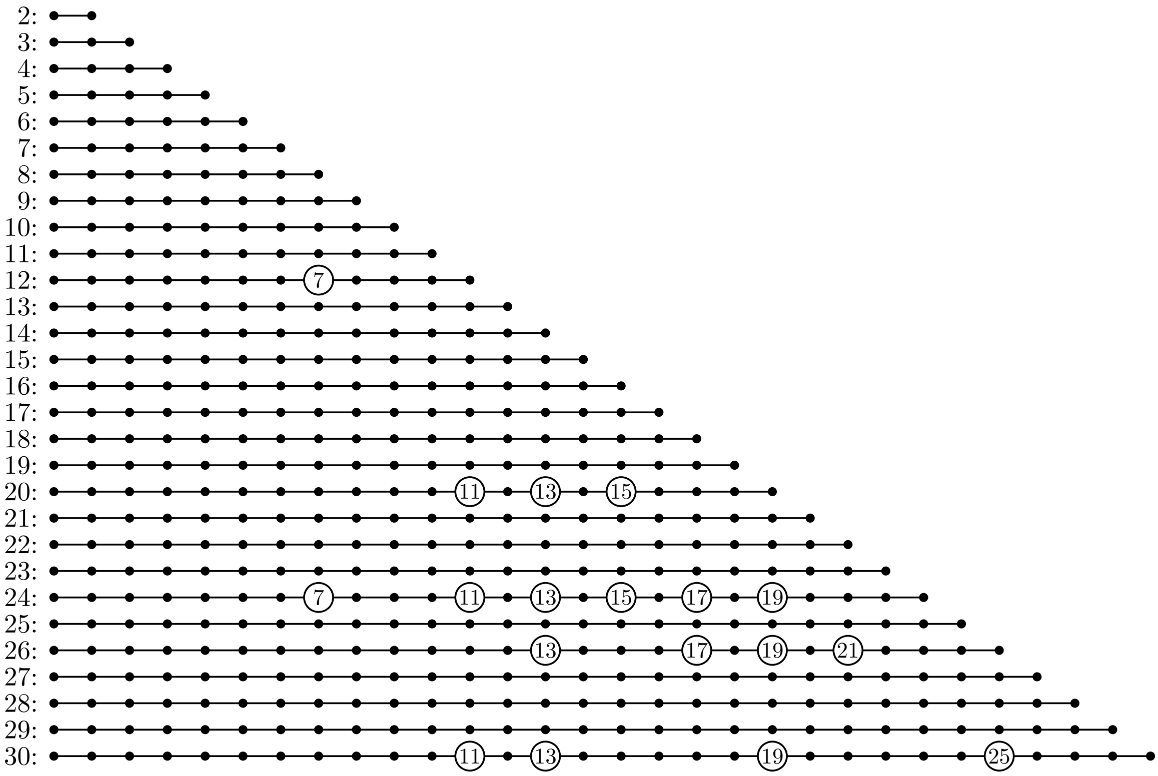
5. *Dokážte, že existuje nekonečne veľa celých čísel, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare $2^a + 3^b - 5^c$, pričom a, b, c sú nezáporné celé čísla.* (*Ján Mazák, Tomáš Bárta*)

Riešenie. Dokážeme, že daný výraz po delení 12 nikdy nedáva zvyšok 7. Čísla 2^a, 3^b a -5^c dávajú po delení 12 postupne zvyšky z množín $\{1, 2, 4, 8\}$, $\{1, 3, 9\}$, a $\{-1, -5\}$. Pre každý súčet s troch čísel z týchto množín platí $1 + 1 - 5 \leqq s \leqq 8 + 9 - 1$, teda $-3 \leqq s \leqq 16$. Jediná možná hodnota s dávajúca zvyšok 7 po delení 12 je teda $s = 7$. Ak ale z tretej množiny vyberieme -1, musíme z prvých dvoch vybrať čísla so súčtom 8, čo sa zjavne nedá. Podobne dopadneme, keď z tretej množiny vyberieme -5. Číslo 7 teda nikdy nevyjadríme ako súčet troch čísel po jednom z každej z týchto troch množín, čo dokazuje, že skúmaný výraz nemôže byť rovný číslu tvaru $12k + 7$, pričom k je celé číslo. A takých čísel je nekonečne veľa.

Poznámka. Dá sa overiť, že každý iný zvyšok po delení 12 skúmaný výraz nadobúdať môže. Tiež platí, že pre každé prirodzené $n < 12$ skúmaný výraz môže nadobúdať všetky možné zvyšky po delení n. Naopak najmenšie $n > 12$, pre ktoré sa nejaký zvyšok znova nenadobúda, je $n = 20$, pričom vtedy sú nedosiahnuteľné dokonca tri zvyšky 11, 13 a 15.

Iné riešenie. Skúmajme zvyšky po delení 20. Dokážeme, že niektorý nepárny zvyšok sa nedá získať. Čísla 3^b a -5^c dávajú po delení 20 zvyšky z množín $\{1, 3, 7, 9\}$ a $\{-1, -5\}$. Súčet dvoch čísel po jednom z týchto dvoch množín nadobúda nanajvýš $4 \cdot 2 = 8$ hodnôt, napospol párnych. Číslo 2^a dáva nepárny zvyšok iba pre $a = 0$, preto pre celý výraz $2^a + 3^b - 5^c$ máme nanajvýš 8 možných nepárnych zvyškov, takže po delení 20 sa nedajú dostať najmenej dva nepárne zvyšky.

Poznámka. Také zvyšky sú dokonca tri, a síce 11, 13 a 15. Na druhej strane sa dá overiť, že všetky párne zvyšky sú dosiahnuteľné. (Nedosiahnuteľné zvyšky pre $n \leqq 30$ ukazuje nasledujúca schéma.)



6. *Pre ktoré prirodzené čísla n možno do tabuľky $n \times n$ vpísať všetky celé čísla od* 1 *po* n^2 *tak, aby aritmetický priemer čísel v každom riadku aj stĺpci tabuľky bol celým číslom?* (Laura Vištanová)

Riešenie. Potrebujeme dosiahnuť to, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci bude deliteľný n. Obmedzíme sa preto na vypĺňanie tabuľky číslami $0, 1, \ldots, n-1$, pričom každé z nich bude použité práve n-krát (lebo tak dostaneme zvyšky všetkých čísel od 1 do n^2). Rozlíšime nasledujúce prípady:

▷ n je nepárne číslo. Uvažujme tabuľku:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 0\ 1\ 2 & \ldots & n-1 \\ 0\ 1\ 2 & \ldots & n-1 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0\ 1\ 2 & \ldots & n-1 \\ \hline \end{array}$$

V každom stĺpci máme n rovnakých čísel, takže ich súčet je deliteľný n. Súčty v riadkoch sú rovné $0 + 1 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$, čo je tiež násobok n, lebo n je nepárne.

▷ $n = 4k$ pre nejaké prirodzené k. V takom prípade rozdeľme tabuľku $4k \times 4k$ na $4k^2$ štvorčekov 2×2 a uvažujme nasledujúci vzor:

$$\begin{array}{|cc|}\hline x & 4k-x \\ 4k-x & x \\ \hline \end{array}$$

Takých štvorčekov potrebujeme umiestniť práve $2k$ pre každé $x = 1, 2, \ldots, 2k-1$ a práve k pre $x = 2k$. Ostáva umiestniť čísla 0, ktoré dáme do zvyšných k štvorčekov 2×2. Také vyplnenie tabuľky bude zrejme vyhovovať zadaniu, keďže v každom takomto štvorčeku je súčet čísel v riadkoch aj stĺpcoch deliteľný $4k$ a ich rozmiestnenie v celej tabuľke túto deliteľnosť neovplyvní.

▷ $n = 4k + 2$ pre nejaké nezáporné celé k. Pre $k = 0$ (teda $n = 2$) ľahko zistíme, že požadované vyplnenie neexistuje. Nech $k \geqq 1$. Vtedy vyplňme podtabuľku 4×4 v ľavom hornom rohu nasledovne:

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 4k+1 & 0 & 0 \\ 2k & 2k+2 & 0 & 0 \\ 2k+1 & 0 & 2k & 1 \\ 0 & 2k+1 & 2k+2 & 4k+1 \\ \hline \end{array}$$

Vidíme, že v každom riadku aj stĺpci je zatiaľ súčet čísel deliteľný $4k + 2$. Zvyšok celej tabuľky sa pritom dá rozdeliť na štvorčeky 2×2 a podobne ako v predošlom prípade vyplniť pomocou tohto vzoru:

$$\begin{array}{|cc|}\hline x & 4k+2-x \\ 4k+2-x & x \\ \hline \end{array}$$

Takých štvorčekov potrebujeme práve $2k$ pre $x = 1$ a $x = 2k$, práve k pre $x = 2k + 1$ a práve $2k + 1$ pre každé $x = 2, \dots, 2k - 1$. Týmto vyplnením zrejme zabezpečíme, že v každom riadku aj stĺpci bude súčet čísel deliteľný $4k + 2$. Ostáva doplniť čísla 0 do zvyšných $k - 1$ štvorčekov 2×2, čím doterajšie vyhovujúce hodnoty riadkových ani stĺpcových súčtov nezmeníme.

Úlohe teda vyhovujú všetky prirodzené čísla n rôzne od 2.

Iné riešenie. Ukážeme alternatívne riešenie pre prípady $n = 4k$ a $n = 4k + 2$, pričom k je prirodzené číslo.

▷ $n = 4k$:

$$\begin{array}{|ccccccccc|}
\hline
1 & 4k-1 & 2 & 4k-2 & \dots & 2k-1 & 2k+1 & 2k & 2k \\
1 & 4k-1 & 2 & 4k-2 & \dots & 2k-1 & 2k+1 & 2k & 2k \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 4k-1 & 2 & 4k-2 & \dots & 2k-1 & 2k+1 & 2k & 2k \\
1 & 4k-1 & 2 & 4k-2 & \dots & 2k-1 & 2k+1 & 0 & 0 \\
1 & 4k-1 & 2 & 4k-2 & \dots & 2k-1 & 2k+1 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 4k-1 & 2 & 4k-2 & \dots & 2k-1 & 2k+1 & 0 & 0 \\
1 & 4k-1 & 2 & 4k-2 & \dots & 2k-1 & 2k+1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Vidíme, že čísla v riadkoch sa dajú spárovať do dvojíc so súčtom deliteľným $4k$, takže ich celkový súčet je deliteľný $4k$. V prvých $4k - 2$ stĺpcoch máme po $4k$ rovnakých čísel, takže ich súčet je tiež násobok čísla $4k$. Súčty v posledných dvoch stĺpcoch sú rovné $2k \cdot 2k = 4k^2$, čo je tiež číslo deliteľné $4k$.

▷ $n = 4k + 2$.

Všimnime si najskôr, že ľubovoľné čísla $a_1, a_2, \dots, a_l$, pričom každé z nich máme k dispozícii l-krát, dokážeme umiestniť do tabuľky $l \times l$ tak, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci bude rovnaký:

$$t(a_1, a_2, \dots, a_l) = \begin{array}{|ccccc|}
\hline
a_1 & a_2 & \dots & a_{l-1} & a_l \\
a_2 & a_3 & \dots & a_l & a_1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{l-1} & a_l & \dots & a_{l-3} & a_{l-2} \\
a_l & a_1 & \dots & a_{l-2} & a_{l-1} \\
\hline
\end{array}$$

Túto konštrukciu využijeme takto: Rozdeľme množinu $\{0, 1, \dots, 4k+1\} \setminus \{0, 2k + 1\}$ ľubovoľným spôsobom na dve disjunktné skupiny A, B také, že $|A| = 2k - 1$ (teda $|B| = 2k + 1$). Teraz vytvoríme štyri postupnosti $2k + 1$ čísel

$$0, 0, A, \quad 2k + 1, 2k + 1, A, \quad B, \quad B,$$

pričom pre každú z nich vytvoríme opísaným spôsobom tabuľku $(2k + 1) \times (2k + 1)$. Tieto štyri tabuľky potom dáme k sebe do konečnej tabuľky $(4k + 2) \times (4k + 2)$ takto:

$$\begin{array}{|cc|}
\hline
t(0, 0, A) & t(B) \\
t(B) & t(2k + 1, 2k + 1, A) \\
\hline
\end{array}$$

V takej tabuľke je každé z čísel $0, 1, \ldots, 4k+1$ použité práve $(4k+2)$-krát. Ostáva overiť, že súčty vo všetkých riadkoch a stĺpcoch sú deliteľné číslom $4k+2$. Súčet čísel v postupnostiach A, B je dokopy rovný $s = 1 + \ldots + (4k+1) - (2k+1) = 2k(4k+2)$, takže je deliteľný $4k+2$. Jednotlivé riadky a stĺpce výslednej tabuľky majú súčty s (prvých $2k+1$ riadkov a stĺpcov) a $s + 4k + 2$ (zvyšné riadky a stĺpce), takže aj tie sú deliteľné číslom $4k+2$, preto vytvorená tabuľka naozaj vyhovuje zadaniu.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Patrik Bak, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019