

2018/2019
68. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie B

(Súťaž sa konala v utorok 2. apríla 2019.)

1. Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a + b = 2$. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

(Patrik Bak)

2. Nájdite všetky osemciferné čísla s touto vlastnosťou: keď vyškrtíme v čísle jeho prvé dve a jeho posledné dve cifry, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2019-krát menšie ako číslo pôvodné.

(Pavel Calábek)

3. Daná je kružnica k so stredom S a tetivou AB , ktorá nie je jej priemerom. Na polpriamke opačnej k polpriamke BA je vybraný ľubovoľný bod K rôzny od B . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKS pretína kružnicu k v takom bode C , ktorý je súmerne združený s bodom B podľa priamky SK .

(Šárka Gergelitsová)

4. Hovoríme, že množina kladných celých čísel je *štvorcová*, ak je neprázdna, konečná a ak súčin všetkých jej prvkov je druhou mocninou celého čísla. Dokážte, že množina $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ má práve $2^{12} - 1$ štvorcových podmnožín.

(Josef Tkadlec)