1. *Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a + b = 2$. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu*

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Výraz V upravme nasledujúcim spôsobom:

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{(a + b)^2 - 2ab}{ab + 1} = \frac{4 - 2ab}{ab + 1} = 1 + \frac{3(1 - ab)}{ab + 1}. \tag{1}$$

Vďaka tomu, že $ab \geqq 0$, z predposledného vyjadrenia výrazu V vyplýva odhad

$$V \leqq \frac{4 - 0}{0 + 1} = 4,$$

pritom rovnosť $V = 4$ je dosiahnutá práve vtedy, keď $ab = 0$, čo spĺňajú dve prípustné dvojice $(a, b) = (2, 0)$ a $(a, b) = (0, 2)$.

Zo známej nerovnosti $\sqrt{ab} \leqq \frac{1}{2}(a + b)$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch nezáporných čísel a, b a z podmienky $a + b = 2$ vyplýva, že $\sqrt{ab} \leqq 1$, a teda tiež $ab \leqq 1$. Preto je zlomok v poslednom vyjadrení (1) nezáporný, a teda platí $V \geqq 1$. Rovnosť $V = 1$ pritom nastáva práve vtedy, keď platí $ab = 1$, čo je podľa nášho odvodenia nerovnosti $ab \leqq 1$ splnené pre jedinú prípustnú dvojicu $(a, b) = (1, 1)$, lebo iba v prípade $a = b$ sa oba využité priemery rovnajú.

Odpoveď. Za daných podmienok má výraz V najmenšiu hodnotu 1 a najväčšiu hodnotu 4.

Iné riešenie. Tentoraz pred úpravou výrazu V doňho dosadíme $b = 2 - a$:

$$V = \frac{a^2 + (2 - a)^2}{a(2 - a) + 1} = \frac{2a^2 - 4a + 4}{-a^2 + 2a + 1} = -2 + \frac{6}{-a^2 + 2a + 1} = -2 + \frac{6}{2 - (a - 1)^2}. \tag{2}$$

Keďže zo zadania vyplýva $0 \leqq a \leqq 2$ čiže $-1 \leqq a - 1 \leqq 1$, platí $0 \leqq (a - 1)^2 \leqq 1$. Z toho pre menovateľ posledného zlomku v (2) vyplývajú odhady $1 \leqq 2 - (a - 1)^2 \leqq 2$, a teda sú splnené nerovnosti

$$V \leqq -2 + \frac{6}{1} = 4 \quad \text{a} \quad V \geqq -2 + \frac{6}{2} = 1.$$

Podľa nášho postupu pritom rovnosť $V = 4$, resp. $V = 1$ nastane práve vtedy, keď hodnota $(a - 1)^2$ bude rovná jednej, resp. nule, čo vedie na rovnaké dvojice (a, b) ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Ak nájdeme dosiahnuteľné hodnoty $V = 1$, $V = 4$ a napadne nás, že to budú hľadané extrémy výrazu V za daných podmienok na čísla a a b, môžeme potrebné nerovnosti $V \geqq 1$ a $V \leqq 4$ overiť pomerne ľahko ich ekvivalentnými úpravami, napríklad tak, že po odstránení zlomku v oboch prípadoch využijeme rovnosť $4 = (a+b)^2$:

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{ab+1} &\geqq 1, \\ a^2+b^2 &\geqq ab+1, \\ 4a^2+4b^2 &\geqq 4ab+(a+b)^2, \\ 3(a-b)^2 &\geqq 0,\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{ab+1} &\leqq 4, \\ a^2+b^2 &\leqq 4ab+4, \\ a^2+b^2 &\leqq 4ab+(a+b)^2, \\ 0 &\leqq 6ab.\end{aligned}$$

Keďže obe konečné nerovnosti platia, je celé riešenie hotové. (Zároveň sme zistili, že rovnosť $V = 1$, resp. $V = 4$ nastane práve v prípade, keď prípustné čísla a, b spĺňajú podmienku $a = b$, resp. $ab = 0$.)

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho po 2 bodoch za dôkazy nerovností $V \geqq 1$, $V \leqq 4$ a po 1 bode za príklady dvojíc (a, b), pre ktoré v dokázaných nerovnostiach nastanú rovnosti, pričom nepožadujeme odvodenie príkladov dvojíc uvedeným rozborom, stačí ich uviesť. Ak však sú obe správne hodnoty 1 a 4 len uhádnuté, dajte dokopy iba 1 bod, a to iba za predpokladu, že obe hodnoty sú doložené príkladmi dvojíc (a, b).

---

2. *Nájdite všetky osemciferné čísla s touto vlastnosťou: keď vyškrtneme v čísle jeho prvé dve a jeho posledné dve cifry, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2 019-krát menšie ako číslo pôvodné.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. V ľubovoľnom vyhovujúcom osemcifernom čísle N označme A jeho prvé dvojčíslie, B nasledujúce štvorčíslie a C posledné dvojčíslie. Ak budeme A, B, C chápať ako čísla zapísané v desiatkovej sústave, platí $10 \leqq A \leqq 99$, $1\,000 \leqq B \leqq 9\,999$ (podľa zadania je číslo B štvorciferné, takže jeho zápis nezačína nulou), $0 \leqq C \leqq 99$. Pôvodné číslo N potom má vyjadrenie $N = 10^6 A + 10^2 B + C$, ktoré má podľa zadania spĺňať rovnicu

$$10^6 A + 10^2 B + C = 2\,019B, \quad \text{čiže} \quad 10^6 A + C = 1\,919B.$$

Zapíšme ju vzhľadom na rozklad $1\,919 = 19 \cdot 101$ ako rovnicu

$$(101-1)^3 A + C = 19 \cdot 101 \cdot B,$$

z ktorej vyplýva, že číslo 101 je deliteľom celého čísla $C - A$, pretože

$$(101-1)^3 A + C = \bigl(101^3 A - 3 \cdot 101^2 A + 3 \cdot 101 A - A\bigr) + C = 101k + (C - A),$$

pričom k je vhodné celé číslo. Keďže však z uvedených odhadov pre čísla A a C vyplývajú nerovnosti $-99 \leqq C - A \leqq 89$ a v intervale $\langle -99, 89 \rangle$ leží jediný násobok čísla 101, konkrétne číslo 0, musí platiť $C - A = 0$. Po dosadení $C = A$ dostaneme zjednodušenú rovnicu

$$\bigl(10^6 + 1\bigr)A = 19 \cdot 101 \cdot B,$$

ktorej obe strany už môžeme vydeliť číslom 101, lebo $10^6 + 1 = 101 \cdot 9\,901$, a dospieť tak ku konečnej rovnici

$$9\,901A = 19B.$$

Z toho vďaka nesúdeliteľnosti čísel 9 901 a 19 (platí totiž $9\,901 = 521 \cdot 19 + 2$) vyplýva, že štvorciferné číslo B je násobkom čísla 9 901, a preto posledná rovnica je v našej situácii splnená jedine tak, že je $B = 9\,901$ a $A = 19$ (a teda tiež $C = 19$).

Odpoveď. Úlohe vyhovuje jediné osemciferné číslo 19 990 119.

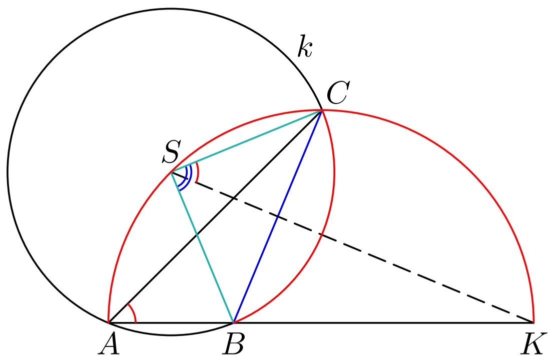
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vhodné označenie čísel A, B, C a zostavenie rovnice dajte 1 bod, 2 body za pozorovanie, že 101 musí deliť $A \cdot 10^6 + 1$, 1 bod za odvodenie $101 \mid C - A$, 1 bod za odvodenie rovnosti $C = A$ a 1 bod za doriešenie rovnice $9\,901 = 19B$ (nesúdeliteľnosť čísel 9 901 a 19 je nutné aspoň uviesť, jej dôkaz však nevyžadujeme).

Ak riešiteľ deliteľnosť číslom 101 neuplatní a dospeje iba k záveru $1\,919 \mid A \cdot 10^6 + 1$, dajte 1 bod.

---

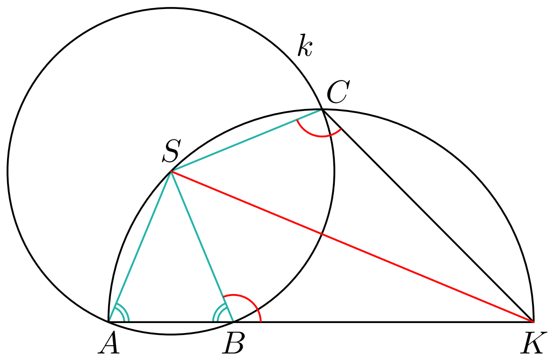
3. *Daná je kružnica k so stredom S a tetivou AB, ktorá nie je jej priemerom. Na polpriamke opačnej k polpriamke BA je vybraný ľubovoľný bod K rôzny od B. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKS pretína kružnicu k v takom bode C, ktorý je súmerne združený s bodom B podľa priamky SK.* (Šárka Gergelitsová)

Riešenie. Bod C musí ležať na kružnicovom oblúku ASK medzi bodmi S a K (obr. 1). Oblúku CK tak prislúchajú zhodné obvodové uhly CSK a CAK. Druhý z nich je pritom ostrým obvodovým uhlom nad oblúkom BC pôvodnej kružnice k (lebo ostrý je aj väčší uhol SAB pri základni AB rovnoramenného trojuholníka SAB), takže sa rovná polovici konvexného stredového uhla BSC. Tej sa teda rovná aj uhol CSK, takže priamka KS rozpoľuje uhol BSC. Preto je aj osou základne BC rovnoramenného trojuholníka SBC a dôkaz tvrdenia je ukončený.



Obr. 1

Iné riešenie. Vďaka polohe bodu C na kružnicovom oblúku ASK (obr. 2) je štvoruholník $AKCS$ tetivový, a tak sa jeho vnútorné uhly KCS a KAS dopĺňajú do 180°. Avšak druhý z týchto uhlov, totožný s uhlom BAS, je vďaka rovnosti $|AS| = |BS|$ zhodný s uhlom ABS, ktorý sa zasa dopĺňa do 180° s vedľajším uhlom KBS. Spolu dostávame zhodnosť uhlov KBS a KCS. Sú to vnútorné uhly trojuholníkov BKS a CKS, oba protiľahlé k ich spoločnej strane KS. Keďže vďaka zadaniu úlohy navyše platí $|BS| = |CS| < |KS|$, sú trojuholníky BKS a CKS zhodné podľa vety Ssu, a teda ich vrcholy B a C sú naozaj súmerne združené podľa priamky KS, ako sme mali dokázať.



Obr. 2

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, absenciu zmienky o polohe bodu C na oblúku ASK pritom nepenalizujte.

Pri prvom postupe dajte 2 body za rovnosť uhlov CSK a CAK, 2 body za vzťah medzi uhlami BAC a BSC, zvyšné 2 body za záverečnú úvahu o rovnoramennom trojuholníku SBC.

Pri druhom postupe dajte 4 body za dôkaz zhodnosti uhlov KBS a KCS (z toho 2 body za vzťah medzi uhlami KCS a KAS – len za zmienku o tetivovom štvoruholníku $AKCS$ žiadny bod neudeľujte) a 2 body za uplatnenie vety Ssu (ak pritom chýba porovnanie dĺžok Ss, strhnite 1 bod).

---

4. *Hovoríme, že množina kladných celých čísel je štvorcová, ak je neprázdna, konečná a ak súčin všetkých jej prvkov je druhou mocninou celého čísla. Dokážte, že množina* $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ *má práve* $2^{12} - 1$ *štvorcových podmnožín.* (Josef Tkadlec)

Riešenie. Vieme, že prirodzené číslo je druhou mocninou práve vtedy, keď v jeho prvočíselnom rozklade má každé prvočíslo párny počet výskytov. Prvočísla zo zadanej množiny $Z = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ tvoria množinu $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, zvyšných 12 čísel (jednotka a tie zložené) potom množinu

$$Q = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}.$$

Keďže žiadna zo štvorcových podmnožín množiny Z zrejme nemôže mať svoje prvky napospol z P, musí obsahovať aspoň jedno číslo z Q.

Vysvetlime, prečo naopak *každú* z $2^{12} - 1$ neprázdnych podmnožín X množiny Q možno jediným spôsobom doplniť prvočíslami z P tak, aby tým vznikla štvorcová množina (prípadne nie je nutné ani možné doplniť žiadne prvočíslo z P, ak je už samotná množina X štvorcová). Vyplýva to z toho, že pre danú neprázdnu množinu $X \subseteq Q$ dopĺňajúcimi prvočíslami z P musia byť práve tie, ktoré sa v prvočíselnom rozklade čísla rovného súčinu prvkov z X vyskytujú v nepárnom počte. Takto vytvorené štvorcové množiny v počte $2^{12} - 1$ $(= 4\,095)$ sú zrejme navzájom rôzne (lebo každá má s množinou Q iný prienik), preto je počet všetkých štvorcových podmnožín množiny Z naozaj rovný $2^{12} - 1$, ako sme mali dokázať.

Iné riešenie. Ukážeme, že rovnakú myšlienku možno uplatniť aj pri konštrukcii ľubovoľnej štvorcovej množiny $X \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Budeme postupne rozhodovať, ktoré z aktuálnych čísel $20, 19, \ldots, 1$ (radených zostupne) do X zaradiť a ktoré nie, sledujúc pritom rozklad súčinu všetkých doposiaľ vybraných čísel na prvočinitele (tento [prázdny] súčin považujeme za rovný 1, kým nevyberieme prvé číslo).

- ▷ Ak je aktuálne číslo n zložené alebo rovné jednej, môžeme sa rozhodnúť ľubovoľne (vybrať ho, alebo nevybrať), pretože ak je $n > 1$, sú všetky jeho prvočinitele menšie a budú aktuálne neskôr.
- ▷ Ak je aktuálne číslo n rovné prvočíslu p, máme pri rozhodovaní o jeho výbere poslednú možnosť, ako ovplyvniť paritu počtu jeho výskytov v rozklade aktuálneho súčinu doposiaľ vybraných čísel. Potrebujeme, aby sa tento počet buď zmenil z nepárneho čísla na párne – vtedy p vyberieme, alebo aby zostal párny – vtedy p nevyberieme (ako to bude vždy pri aktuálnych prvočíslach 19, 17, 13 a 11).

Opísané jednoznačné rozhodnutia o každom aktuálnom prvočísle nám zaručia, že množina X všetkých vybraných čísel po ukončení celej konštrukcie bude štvorcová. Keďže pritom dve možnosti (vybrať, či nevybrať) budeme mať pre práve 12 aktuálnych čísel, a to 20, 18, 16, 15, 14, 12, 10, 9, 8, 6, 4 a 1, bude celkový počet možných výberov 2^{12}, v jednom prípade ale dostaneme prázdnu množinu X, ktorá je zadaním úlohy vylúčená.

Iné riešenie. Ukážeme, že úlohu možno (aj keď komplikovanejšie) riešiť istým rozborom možností, pri ktorom budeme dbať na zastúpenie jednotlivých prvočísel v súčine čísel, ktoré budeme do štvorcovej množiny po etapách vyberať.

Prvočísla 11, 13, 17 a 19 sa zrejme v žiadnej zo započítaných štvorcových množín nemôžu vyskytovať. Čísla z množiny $C = \{1, 4, 9, 16\}$ sú sami druhými mocninami, preto ich doplnenie či naopak odstránenie nemá na štvorcovosť takto upravovanej množiny vplyv (aby to bolo korektné vyjadrenie, považujme dočasne za štvorcovú aj *prázdnu* množinu). Odhliadnime teda od doposiaľ spomenutých čísel a určme najskôr, koľko štvorcových podmnožín má množina zvyšných čísel

$$M = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20\}.$$

V rozklade každého čísla z M má niektoré z prvočísel $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ *nepárny* počet výskytov, pritom do štvorcovej podmnožiny musíme vybrať čísla z M práve tak, aby pre každé prvočíslo p bol vybraný *párny* počet čísel, ktoré majú vo svojom rozklade *nepárny* počet výskytov p. Máme teda vybrať párny počet čísel z každej zo skupín

$$\{7, 14\},\ \{5, 10, 15, 20\},\ \{3, 6, 12, 15\},\ \{2, 6, 8, 10, 14, 18\}. \tag{S}$$

Tieto skupiny ale nie sú po dvoch disjunktné, čo komplikuje postup výberov čísel z týchto skupín pre ľubovoľnú štvorcovú podmnožinu M, na ktorý by sme chceli uplatniť kombinatorické pravidlo súčinu. Rozdeľme preto množinu M na (disjunktné) skupiny násobkov jednotlivých prvočísel podľa *najväčšieho* z prvočísel, ktoré majú v rozklade daného čísla *nepárny* počet výskytov:

$$N_7 = \{7, 14\},\ N_5 = \{5, 10, 15, 20\},\ N_3 = \{3, 6, 12\},\ N_2 = \{2, 8, 18\}.$$

Z týchto užších skupín (v uvedenom poradí) budeme vyberať čísla do ľubovoľnej štvorcovej podmnožiny M, a to tak, aby sme dodržali podmienku na zastúpenie čísel z pôvodných skupín uvedených v (S). V prvých dvoch krokoch musíme vybrať párny počet (0 alebo 2) čísel z N_7 aj párny počet (0, 2 alebo 4) čísel z N_5. Na tieto dva výbery tak máme $2 \times 8 = 2^4$ možností. Potom vzhľadom na to, či bolo, resp. nebolo vybrané číslo $15 \in N_5$, musíme z N_3 vybrať nepárny (1 alebo 3), resp. párny (0 alebo 2) počet čísel. V oboch prípadoch tak budeme mať na výber rovnako $4 = 2^2$ možností, prvé tri výbery tak možno spraviť $2^4 \times 2^2 = 2^6$ spôsobmi. Posledný, štvrtý výber čísel z N_2 bude závisieť na tom, či sme z čísel $14 \in N_7$, $10 \in N_5$ a $6 \in N_3$ vybrali nepárny, resp. párny počet – podľa toho musíme z N_2 vybrať rovnako tak nepárny (1 alebo 3), resp. párny (0 alebo 2) počet čísel. Aj teraz máme v oboch rozlíšených prípadoch pre výber čísel z N_2 rovnako $4 = 2^2$ možností. Možno teda naposledy uplatniť pravidlo súčinu a dôjsť tak k záveru, že hľadaný počet všetkých štvorcových podmnožín M je rovný $2^6 \times 2^2 = 2^8$. Keďže pre každú z nich máme 2^4 možností pre doplnenie o čísla z C, je celkový počet štvorcových podmnožín pôvodnej zadanej množiny rovný 2^{8+4}, teda 2^{12} – vrátane tej prázdnej, za ktorú je teraz ešte nutné odčítať jednotku.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, za drobné formálne chyby strhnite 1 bod.

Pri postupe z prvého riešenia dajte 1 bod za rozdelenie zadanej množiny na množinu P zastúpených prvočísel (z nej je možné prvočísla 11, 13, 17 a 19 rovno eliminovať) a na množinu zvyšných čísel Q, 4 body za vysvetlenie, prečo každú skupinu čísel z Q možno jediným spôsobom doplniť niektorými prvočíslami z P na štvorcovú množinu a 1 bod za dokončenie dôkazu.

Pri postupe z druhého riešenia dajte 1 bod za rozhodnutie konštruovať štvorcovú množinu postupným rozhodovaním o zastúpení čísel v klesajúcom poradí, t. j. od čísla 20 k číslu 1, 2 body za rozhodnutie o všetkých aktuálnych číslach zložených a 3 body za rozhodnutie o všetkých aktuálnych prvočíslach. Ak je však správne rozhodnuté iba o prvočíslach 11, 13, 17, 19 a štvorcových číslach 1, 4, 9 a 16, dajte za taký počiatočný pokus o konštrukciu iba 1 bod.

Pri neúplnom postupe z tretieho riešenia dajte nanajvýš 3 body, z toho 1 bod za elimináciu prvočísel 11, 13, 17, 19 spolu s konštatovaním o indiferentnosti čísel 1, 4, 9 a 16. Druhý bod potom dajte pri ďalších drobných úvahách o zastúpení čísel z vhodne vybraných množín, ako sú napr. $\{7, 14\}$ alebo $\{5, 10, 15, 20\}$. Tretí bod je možné udeliť iba pri výraznejšom pokroku, akým je napr. úvaha o tom, že štvorcové množiny sú práve tie, ktoré obsahujú párny počet čísel z každej zo štyroch skupín uvedených v (S).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019