68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Každé políčko tabuľky* 68×68 *máme ofarbiť jednou z troch farieb (červená, modrá, biela). Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby každá trojica susedných políčok v každom riadku a v každom stĺpci obsahovala políčka všetkých troch farieb?*

(*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Akonáhle určíme farby niektorých dvoch susedných políčok jedného riadka alebo stĺpca tabuľky, ofarbenie všetkých jeho ďalších políčok je už požiadavkami úlohy určené jednoznačne. Farby v každom riadku aj stĺpci sa tak pravidelne striedajú s periódou 3.

Povedzme, že $abcabc\ldots$ je ofarbenie políčok prvého riadka. Zo šiestich možných ofarbení políčok ľubovoľného riadka

$$abcabc\ldots,$$
$$bcabca\ldots,$$
$$cabcab\ldots,$$
$$acbacb\ldots,$$
$$bacbac\ldots,$$
$$cbacba\ldots$$

zrejme pre druhý riadok prichádzajú do úvahy iba druhé a tretie. Akonáhle jedno z nich pre druhý riadok zvolíme, druhé z nich musí byť ofarbením políčok tretieho riadka. Štvrtý riadok potom bude ofarbený rovnako ako prvý, piaty ako druhý atď. s periódou 3.

Zhrňme naše úvahy. Pre ofarbenie $abcabc\ldots$ prvého riadka máme $3 \cdot 2 = 6$ možností (3 pre voľbu a, 2 pre voľbu b). Pre ofarbenie druhého riadka, ako sme zistili, potom máme dve možnosti. Ofarbenie ďalších riadkov je už určené jednoznačne. Počet všetkých vyhovujúcich ofarbení celej tabuľky je teda rovný $6 \cdot 2 = 12$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za konštatovanie, že sa farby v každom riadku pravidelne striedajú s periódou 3 (aj bez podrobnejšieho vysvetlenia), dajte 2 body a ďalší bod za zdôvodnenie, že počet možností ofarbení jedného riadka je potom rovný 6. Ďalšie 2 body dajte za zdôvodnenie, prečo po ofarbení jedného riadka možno ďalší riadok ofarbiť dvoma spôsobmi, a posledný bod za záver, že počet ofarbení je rovný 12. Len za uhádnutie správneho výsledku dajte 1 bod. (Rovnaké úvahy samozrejme platia aj pre stĺpce.)

---

2. *Aký je najmenší možný súčet štyroch prirodzených čísel takých, že dvojice vytvorené z týchto čísel majú najväčšie spoločné delitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte príklad vyhovujúcej štvorice s takým súčtom a zdôvodnite, prečo neexistuje vyhovujúca štvorica s menším súčtom.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Dajme tomu, že máme štyri čísla s požadovanými vlastnosťami. Keďže práve tri dvojice majú párneho najväčšieho spoločného deliteľa, sú práve tri z nich párne a jedno nepárne (nemôžu byť všetky párne a dve párne sú na tri párne spoločné delitele málo). Označme tri párne čísla a, b a c tak, že pre ich najväčšie spoločné delitele s nepárnym číslom d platí $(d,a) = 3$, $(d,b) = 5$, $(d,c) = 9$. Z toho potom vychádza, že párne čísla a, b, c sú postupne násobky čísel 6, 10, 18 a číslo d je nutne násobok 45.

Čísla a, c majú spoločného deliteľa 6, takže nutne platí $(a, c) = 6$. Hodnoty (a, b) a (b, c) sú preto v niektorom poradí čísla 2 a 4. Máme tak dve možnosti:

Čísla a, b sú násobky 4. Potom čísla a, b, c, d sú postupne násobky čísel 12, 20, 18, 45. Takáto vyhovujúca štvorica má najmenší súčet $12 + 20 + 18 + 45 = 95$.

Čísla b, c sú násobky 4. Potom čísla a, b, c, d sú postupne násobky čísel 6, 20, 36, 45. Takáto vyhovujúca štvorica má najmenší súčet $6 + 20 + 36 + 45 = 107$.

Najmenší možný súčet je teda 95, čomu zodpovedá štvorica 12, 20, 18, 45.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho 1 bod dajte za uvedenie skutočnosti, že tri zo štyroch hľadaných čísel sú párne a jedno je nepárne, a ďalší bod za zistenie, že jednotlivé čísla sú násobky 6, 10, 18 a 45. 2 body potom dajte za využitie deliteľnosti štyrmi a napokon 2 body za záver a určenie správnej štvorice. Len za uhádnutie správnej štvorice dajte 2 body.

---

3. *Na strane AB rovnobežníka $ABCD$, v ktorom $|AB| = 1$, sú zvolené body K a L tak, že $|BK| = \frac{1}{2}$, $|BL| = \frac{1}{3}$. Na strane CD sú zvolené body P a Q tak, že $|CP| = \frac{1}{2}$ a $|CQ| = \frac{1}{3}$. Priesečník priamok LD a KP označme X, priesečník priamok BD a LQ označme Y. Dokážte, že priamka XY rozpoľuje stranu BC.* (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Trojuholníky KLX a PDX sú zrejme podobné (podľa vety uu). Ich pomer podobnosti je rovný $|KL| : |PD| = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1 : 3$. V rovnakom pomere teda bod X delí úsečku KP, takže $|KX| = \frac{1}{4}b$, pričom $b = |BC|$. Podľa vety uu sú podobné aj trojuholníky BLY a DQY, pričom ich pomer podobnosti je $|BL| : |DQ| = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$. Je teda $|LY| = \frac{1}{3}b$.

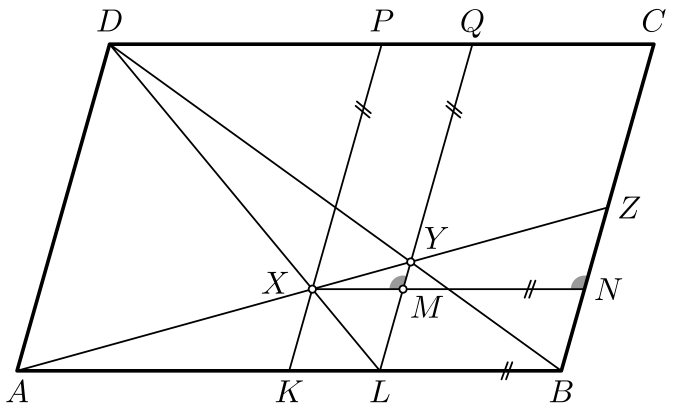
Označme Z stred strany BC uvažovaného rovnobežníka $ABCD$ a veďme bodom X rovnobežku so stranou AB (obr. 1). Jej priesečníky s úsečkami LQ a BC označme postupne M a N, takže $|LM| = |BN| = |KX| = \frac{1}{4}b$, $|MY| = |LY| - |LM| = \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}b = \frac{1}{12}b$ a $|NZ| = |BZ| - |BN| = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}b$. Z toho vyplýva, že

$$\frac{|MY|}{|NZ|} = \frac{\frac{1}{12}b}{\frac{1}{4}b} = \frac{1}{3}$$

a zároveň

$$\frac{|XM|}{|XN|} = \frac{|KL|}{|KB|} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

čo spolu s rovnosťou súhlasných uhlov XMY a XNZ znamená, že trojuholníky XMY a XNZ sú podobné (podľa vety sus). Ich vnútorné uhly pri spoločnom vrchole X sú teda zhodné, a preto stred Z strany BC leží na priamke XY.



Obr. 1

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj využitím poznatku, že priamka XY prechádza vrcholom A, čo možno tiež odvodiť úvahami o podobných trojuholníkoch. Z rovností $|AK| = \frac{1}{2}$, $|AL| = \frac{2}{3}$, $|KX| = \frac{1}{4}b$, $|LY| = \frac{1}{3}b$ totiž vyplýva

$$\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{|KX|}{|LY|} = \frac{\frac{1}{4}b}{\frac{1}{3}b} = \frac{3}{4},$$

takže podobne ako vo vzorovom riešení dostávame podobnosť trojuholníkov AKX, ALY, z ktorej už vyplýva, že body A, X, Y ležia na jednej priamke. Analogicky dokážeme, že napríklad aj trojice bodov A, X, Z ležia na jednej priamke, lebo

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{|KX|}{|BZ|} = \frac{\frac{1}{4}b}{\frac{1}{2}b} = \frac{1}{2}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za vyjadrenie dĺžok KX a LY pomocou dĺžky strany BC, 2 body za uvažovanie rovnobežky bodom X a 2 body za dôkaz kolineárnosti pomocou podobnosti.

Pri postupe naznačenom v poznámke dajte 2 body za vyjadrenie dĺžok KX a LY, ďalšie 2 body za dôkaz kolineárnosti bodov A, X, Y a 2 body za dôkaz kolineárnosti bodov A, X, Z (prípadne A, Y, Z). Len za uhádnutie, že priamka XY prechádza vrcholom A, dajte 1 bod a závery z toho vyplývajúce už nehodnoťte.

---

4. *Reálne čísla a, b, c, všetky väčšie ako $\frac{1}{2}$, spĺňajú podmienku $ab+bc+ca = \frac{5}{4}$. Dokážte, že platí*

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Z predpokladanej rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ a z podmienok $b > \frac{1}{2}$, $c > \frac{1}{2}$ vyplýva $\frac{5}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$, t. j. $1 > a$, a teda $a > a^2$, lebo číslo a je podľa predpokladu kladné. Analogicky dostaneme aj $b > b^2$ a $c > c^2$. Sčítaním posledných troch nerovností už dostávame vytúženú nerovnosť

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho 3 body dajte za dôkaz, že uvažované reálne čísla a, b, c sú menšie ako jedna, a ďalší 1 bod potom dajte za uvedenie odtiaľ vyplývajúcich nerovností $a < a^2$, $b < b^2$, $c < c^2$. Za dokončenie dôkazu napokon udeľte posledné 2 body. Len za uvedenie skutočnosti, že všetky tri čísla a, b, c sú menšie ako jedna (bez dôkazu), neudeľujte žiadny bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Tomáš Jurík, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019