<u>*Informácia pre okresnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* skmo@skmo.sk *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* skmo.sk/dokument.php?id=429 *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

1. *Majka, Vašo a Zuzka počítali cez víkend úlohy. Majka a Vašo vypočítali dokopy 25 úloh. Zuzka a Vašo vypočítali dokopy 32 úloh. Pritom Zuzka vypočítala dvakrát viac úloh ako Majka. Koľko úloh vypočítal Vašo?* (Monika Dillingerová)

Riešenie. Zuzka vypočítala dvakrát viac úloh ako Majka. Teda počet úloh, ktoré celkom vypočítali Zuzka a Vašo, je rovnaký ako počet úloh, ktoré celkom vypočítali Majka a Vašo, zväčšený o počet úloh, ktoré vypočítala Majka.

Zuzka a Vašo vypočítali celkom 32 úloh, Majka a Vašo vypočítali celkom 25 úloh, teda Majka vypočítala 7 úloh ($32 - 25 = 7$). Z toho dostávame, že Vašo vypočítal 18 úloh ($25 - 7 = 18$).

Návrh hodnotenia. 3 body za úvodnú úvahu; 3 body za dopočítanie a záver.

Poznámka. Ak m, v, resp. z sú počty úloh, ktoré vypočítali Majka, Vašo, resp. Zuzka, tak zo zadania máme $m + v = 25$, $z + v = 32$ a $z = 2m$. Predchádzajúce myšlienky tak možno stručne zapísať nasledovne:

$$32 = 2m + v = m + m + v = m + 25,$$

teda $m = 7$ a $v = 18$.

2. *Medzi cifry čísla 2019 vložte dve cifry tak, aby vzniknuté šesťciferné číslo*

- *začínalo 2 a končilo 9,*
- *bolo zložené zo šiestich rôznych cifier,*
- *bolo deliteľné tromi,*
- *jeho prvé trojčíslie bolo deliteľné tromi,*
- *jeho prvé štvorčíslie bolo deliteľné štyrmi,*
- *súčet vložených cifier bol nepárny.*

Určte rozdiel najväčšieho a najmenšieho šesťciferného čísla s uvedenými vlastnosťami. (Lucie Růžičková)

Riešenie. Aby nové číslo pozostávalo zo šiestich rôznych cifier, môžeme vkladať dve rôzne cifry z cifier

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Súčet cifier čísla 2019 je 12, teda číslo deliteľné tromi. Aby bolo aj novo vzniknuté číslo deliteľné tromi, môžeme vkladať len také cifry, ktorých súčet je deliteľný tromi. Posledná podmienka zo zadania navyše vyžaduje, aby tento súčet bol nepárny. Zo všetkých možných dvojíc čísel tak môžeme použiť len nasledujúce (v ľubovoľnom poradí):

$$3,6, \quad 4,5, \quad 7,8.$$

Aby nové číslo začínalo 2 a končilo 9, môžeme cifry vkladať len do miest vyznačených hviezdičkou:

$$2{*}{*}019, \quad 2{*}0{*}19, \quad 2{*}01{*}9, \quad 20{*}{*}19, \quad 20{*}1{*}9, \quad 201{*}{*}9.$$

Aby prvé trojčíslie bolo deliteľné tromi, nemôžeme v prvom prípade doplniť žiadnu z uvedených dvojíc, v druhom až piatom prípade môžeme doplniť dvojicu 4, 5 alebo 7, 8 (v tomto poradí) a v poslednom prípade môžeme doplniť ktorúkoľvek z uvedených dvojíc (v ľubovoľnom poradí):

$$2\underline{4}0\underline{5}19, \quad 2\underline{7}0\underline{8}19, \quad 2\underline{4}01\underline{5}9, \quad 2\underline{7}01\underline{8}9, \quad 20\underline{4}1\underline{5}9, \quad 20\underline{7}1\underline{8}9,$$
$$201\underline{36}9, \quad 201\underline{63}9, \quad 201\underline{45}9, \quad 201\underline{54}9, \quad 201\underline{78}9, \quad 201\underline{87}9.$$

Aby prvé štvorčíslie bolo deliteľné štyrmi, musí byť druhé dvojčíslie deliteľné štyrmi. Z uvedených možností tak nakoniec ostávajú iba dve

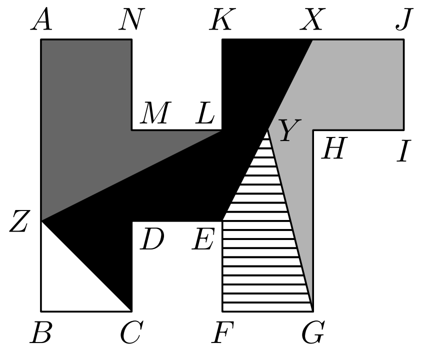
$$2\underline{7}0\underline{8}19, \quad 201\underline{63}9.$$

Využili sme všetky požiadavky zo zadania; opytovaný rozdiel je rovný 69180.

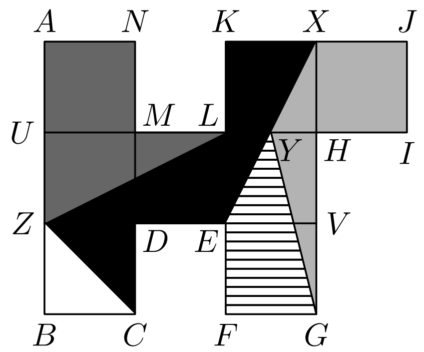
Návrh hodnotenia. 3 body za vyhovujúce možnosti a konečný rozdiel; 3 body za kvalitu, resp. úplnosť komentára.

---

3. *Útvar na obrázku je zložený z ôsmich zhodných štvorcov a je rozdelený úsečkami na päť farebne odlíšených častí. Pritom bod X je stredom úsečky KJ, bod Y je stredom úsečky EX a úsečka BZ je zhodná s BC. Obsah čiernej časti útvaru je $7{,}5\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsahy zvyšných štyroch častí.* (*Eva Semerádová, Monika Dillingerová*)



Riešenie. V obrázku zvýrazníme osem zhodných štvorcov a pomocou nich vyjadríme obsahy jednotlivých častí:



Biela časť tvorí polovicu štvorca.

Tmavosivú časť môžeme rozdeliť na štvorec a pravouhlý trojuholník ZUL, ktorého odvesny sú rovné jednej a dvom stranám štvorca. Tento trojuholník má rovnaký obsah ako štvorec ($\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$), teda obsah tmavosivej časti je rovnaký ako obsah 2 štvorcov.

Čiernu časť môžeme rozdeliť na tri pravouhlé trojuholníky: trojuholníky ZEL a EKX sú zhodné s vyššie spomínaným trojuholníkom ZUL, trojuholník ZDC tvorí polovicu štvorca. Obsah čiernej časti je teda rovnaký ako obsah $\frac{5}{2}$ štvorca ($1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$).

Svetlosivú časť môžeme rozdeliť na štvorec a trojuholník GXY. Body X a E sú vrcholy štvorcov a bod Y je stredom úsečky EX, ktorú interpretujeme ako uhlopriečku obdĺžnika $KEVX$. Úsečka HY je preto zhodná s polovicou strany štvorca. Táto úsečka je výškou trojuholníka GXY na stranu GX, a tá je rovná trom stranám štvorca. Trojuholník GXY má rovnaký obsah ako $\frac{3}{4}$ štvorca ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{4}$), teda obsah svetlosivej časti je rovnaký ako obsah $\frac{7}{4}$ štvorca ($\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$).

Zvyšnú časť môžeme vyjadriť ako rozdiel vyššie uvedených častí,

$$8 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - \frac{7}{4} = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4},$$

teda obsah šrafovanej časti je rovnaký ako obsah $\frac{5}{4}$ štvorca.

Teraz využijeme poznatok, že obsah čiernej časti je 7,5 cm^2. To podľa predchádzajúceho zodpovedá $\frac{5}{2}$ štvorca, teda obsah jedného štvorca je 3 cm^2 ($\frac{5}{2} \cdot 3 = 7{,}5$). Z toho uzatvárame, že obsah bielej časti je 1,5 cm^2 ($\frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$), obsah tmavosivej časti je 6 cm^2 ($2 \cdot 3 = 6$), obsah svetlosivej časti je 5,25 cm^2 ($\frac{7}{4} \cdot 3 = 5{,}25$), a obsah šrafovanej časti je 3,75 cm^2 ($\frac{5}{4} \cdot 3 = 3{,}75$).

Návrh hodnotenia. 4 body za vyjadrenie obsahov všetkých častí pomocou štvorcov; 2 body za dopočítanie obsahov v cm^2.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019