

2009/2010
59. ročník MO

Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A

(Súťaž sa konala 21. – 24. 3. 2010.)

1. Určte všetky dvojice celých kladných čísel a , b , pre ktoré platí

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

(Martin Panák)

2. Kruhový terč s polomerom 12 cm zasiahlo 19 výstrelov. Dokážte, že vzdialenosť niektorých dvoch zásahov je menšia ako 7 cm. (Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

3. Rumburak uniesol na svoj hrad 31 členov strany A , 28 členov strany B , 23 členov strany C , 19 členov strany D a každého zavrel do samostatnej cely. Po práci sa občas mohli prechádzať po dvore a rozprávať sa. Akonáhle sa spolu začali rozprávať traja členovia troch rôznych strán, Rumburak ich za trest preregistroval do štvrtej strany. (Nikdy sa spolu nerozprávali viac ako traja unesení.)

a) Mohlo sa stať, že po určitom čase boli všetci unesení členmi jednej strany? Ktorej?

b) Určte všetky štvorice celých kladných čísel, ktorých súčet je 101 a ktoré ako počty unesených členov štyroch strán umožňujú, aby sa Rumburakovým pričinením stali časom všetci členmi jednej strany.

(Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

4. Je daná kružnica k s tetivou AC , ktorá nie je priemerom. Na jej dotyčnici vedenej bodom A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D priesečník kružnice k s vnútrom úsečky XC (ak existuje). Trojuholník ACD doplníme na lichobežník $ABCD$ vpísaný do kružnice k . Určte množinu priesečníkov priamok BC a AD prislúchajúcich všetkým takým lichobežníkom. (Pavel Leischner)

5. Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme dve čísla napísané na tabuli, ktorých súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla, obe zvolené čísla zotrieme a na tabuľu napíšeme druhú odmocninu z ich súčinu. Takto pokračujeme, až na tabuli ostanú iba také čísla, že súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich tým istým číslom.) Dokážte, že na tabuli ostane aspoň 16 čísel. (Peter Novotný)

6. Nájdite minimum výrazu

$$\frac{a + b + c}{2} - \frac{[a, b] + [b, c] + [c, a]}{a + b + c},$$

pričom premenné a , b , c sú ľubovoľné celé čísla väčšie ako 1 a $[x, y]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel x , y . (Tomáš Jurík)