**68. ročník Matematickej olympiády**
**2018/2019**

*Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6*

---

**1.** *Ivan a Mirka sa delili o hrušky v mise. Ivan si vždy berie dve hrušky a Mirka polovicu toho, čo v mise ostáva. Takto postupne odoberali Ivan, Mirka, Ivan, Mirka a nakoniec Ivan, ktorý vzal posledné dve hrušky. Určte, kto mal nakoniec viac hrušiek a o koľko.*
(*Monika Dillingerová*)

**Nápad.** Koľko hrušiek si vzala Mirka druhý raz?

**Riešenie.** Ivan si bral trikrát po dvoch hruškách, nakoniec tak mal 6 hrušiek. Aby sme určili, koľko nakoniec mala Mirka, postupne odzadu zistíme, ako sa počty hrušiek vyvíjali. Na to si stačí uvedomiť, že pred každým Ivanovým odoberaním bolo v mise o dve hrušky viac a pred každým Mirkiným odoberaním bol v mise dvojnásobný počet hrušiek.

Ivan si pri svojom treťom odoberaní vzal posledné 2 hrušky.

Mirka si pri svojom druhom odoberaní vzala 2 hrušky, pred tým v mise boli 4 hrušky.

Ivan si pri svojom druhom odoberaní vzal 2 hrušky, pred tým v mise bolo 6 hrušiek.

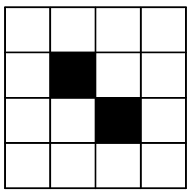
Mirka si pri svojom prvom odoberaní vzala 6 hrušiek, pred tým v mise bolo 12 hrušiek.

Ivan si pri svojom prvom odoberaní vzal 2 hrušky, pôvodne v mise bolo 14 hrušiek.

Mirka si celkom vzala 8 hrušiek, nakoniec teda mala o dve hrušky viac ako Ivan.

---

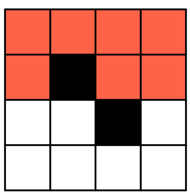
**2.** *Ernest si zo štvorčekového papiera vystrihol štvorec $4 \times 4$. Kristián v ňom vystrihol dve diery, pozri dva čierne štvorčeky na obrázku. Tento útvar skúšal Ernest rozstrihnúť podľa vyznačených čiar na dve zhodné časti. Nájdite aspoň štyri rôzne spôsoby, ako to mohol Ernest spraviť. (Pritom dve strihania považujte za rôzne, ak časti vzniknuté jedným strihaním nie sú zhodné s časťami vzniknutými druhým strihaním.)*



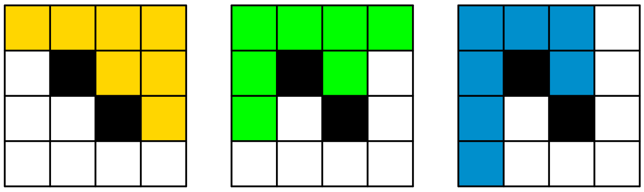
(*Alžbeta Bohiniková*)

**Nápad.** Všimnite si určité súmernosti.

**Riešenie.** Jedno z najjednoduchších možných rozdelení je naznačené na nasledujúcom obrázku:



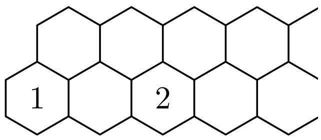
Novo vzniknuté časti sú – rovnako ako pôvodný útvar – súmerné podľa stredu ohraničujúceho štvorca. Predchádzajúce rozdelenie je možné postupne modifikovať tak, aby stredovo súmerné štvorčeky patrili do rôznych častí. Pridávaním, resp. odoberaním štvorčekov v prvom stĺpci dostávame nasledujúce možné rozdelenia:



*Poznámka.* Akákoľvek ďalšia modifikácia vedie buď k rozdeleniu zhodnému s niektorým z predchádzajúcich, alebo k rozdeleniu, ktoré pozostáva z viac nesúvislých častí. Uvedené štyri riešenia teda predstavujú všetky rôzne spôsoby rozdelenia.

---

**3.** *Na obrázku sú naznačené dva rady šesťuholníkových políčok, ktoré doprava pokračujú bez obmedzenia. Do každého políčka doplňte jedno kladné celé číslo tak, aby súčin čísel v ľubovoľných troch navzájom susediacich políčkach bol 2018. Určte číslo, ktoré bude v 2019. políčku v hornom rade.* (*Lucie Růžičková*)

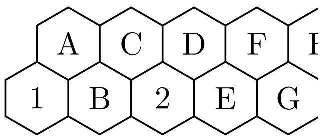



**Nápad.** Ktoré čísla môžete dopĺňať?

**Riešenie.** Prvočíselný rozklad čísla 2018 je $2 \cdot 1009$. Číslo 2018 je teda možné zapísať ako súčin troch kladných čísel iba dvoma spôsobmi (až na zámenu poradia činiteľov):

$$1 \cdot 1 \cdot 2018, \quad 1 \cdot 2 \cdot 1009.$$

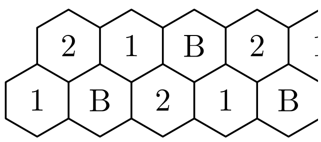
Do prázdnych políčok je teda možné doplniť iba niektoré z čísel 1, 2, 1009 a 2018. Kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu si neznáme čísla v prázdnych políčkach označíme:




Aby platilo $1 \cdot A \cdot B = A \cdot B \cdot C$, musí byť $C = 1$. Aby platilo $A \cdot B \cdot C = B \cdot C \cdot 2$, musí byť $A = 2$. Aby platilo $B \cdot C \cdot 2 = C \cdot 2 \cdot D$, musí byť $D = B$. Takto postupne zisťujeme

$$1 = C = E, \quad A = 2 = F, \quad B = D = G \quad \text{atď.}$$

Čísla v políčkach sa teda pravidelne opakujú podľa nasledujúceho vzoru:



Aby teraz súčin ľubovoľných troch navzájom susediacich políčok bol 2018, musí byť $B = 1009$. V hornom riadku sa teda pravidelne strieda trojica čísel 2, 1, 1009. Keďže $2019 = 3 \cdot 673$, je 2019. políčko tretím políčkom v 673. trojici v hornom riadku. Preto je v tomto políčku číslo 1009.

*Poznámka.* Akonáhle vieme, ktoré čísla sa môžu v políčkach vyskytovať, môžeme ich začať postupne dopĺňať do niektorého z prázdnych políčok a následne skúmať, či a prípadne ako pokračovať ďalej. Tak možno vylúčiť všetky možnosti až na tú uvedenú vyššie. (Keby sme napr. doplnili $A = 1$, tak z požiadavky $1 \cdot A \cdot B = 2018$ vyplýva, že $B = 2018$. Aby ďalej platilo $A \cdot B \cdot C = 2018$, muselo by byť $C = 1$, a teda $B \cdot C \cdot 2 = 2018 \cdot 1 \cdot 2$. Tento súčin však nie je 2018, preto $A$ nemôže byť 1.)

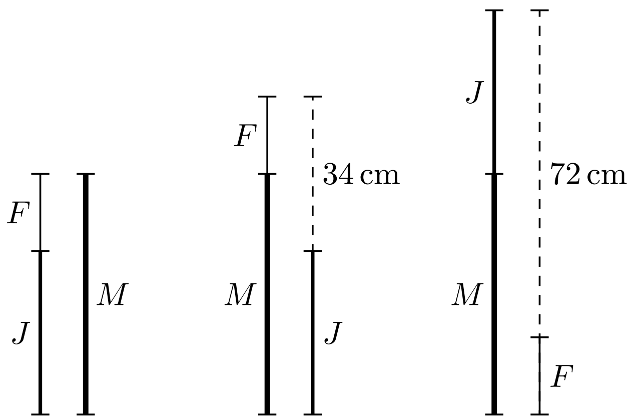
Riešenie, z ktorého nie je zrejmé, prečo vyššie uvedené doplnenie je jediné možné, nemôže byť hodnotené najlepším stupňom.

---

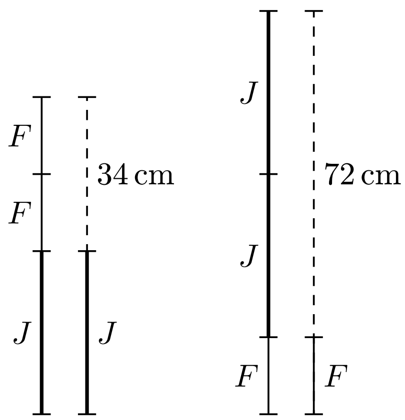
**4.** *Pán Ticháček mal na záhrade troch sadrových trpaslíkov: najväčšieho volal Maško, prostredného Jarko a najmenšieho Fanko. Keďže sa s nimi rád hrával, časom zistil, že keď postaví Fanka na Jarka, sú rovnako vysokí ako Maško. Keď naopak postaví Fanka na Maška, merajú spolu o 34 cm viac ako Jarko. A keď postaví na Maška Jarka, sú o 72 cm vyšší ako Fanko. Ako vysokí sú trpaslíci pána Ticháčka?* (Michaela Petrová)

**Nápad.** Znázornite si všetky tri situácie.

**Riešenie.** Všetky tri situácie si znázorníme takto:




Keďže Jarko s Fankom na hlave merajú rovnako ako Maško, môžeme v druhej a tretej situácii Maška touto dvojicou nahradiť:



Teraz je všetko jasné: Dvaja Fankovia na sebe merajú 34 cm, jeden Fanko tak meria 17 cm. Dvaja Jarkovia na sebe merajú 72 cm, jeden Jarko preto meria 36 cm. Maško potom meria ako Fanko a Jarko dokopy, teda $17 + 36 = 53$ (cm).

---

**5.** *V nasledujúcom príklade na sčítanie predstavujú rovnaké písmená rovnaké cifry, rôzne písmená rôzne cifry:*

$$\begin{array}{r} R\,A\,T\,A\,M \\ R\,A\,D \\ \hline U\,L\,O\,H\,Y \end{array}$$

*Nahraďte písmená ciframi tak, aby bol príklad správne. Nájdite dve rôzne nahradenia.*
(*Erika Novotná*)

**Nápad.** Začnite s ciframi schovanými za písmenami $A$ a $L$.

**Riešenie.** Najskôr si všimnime, že v príklade sa vyskytuje desať rôznych písmen, teda pri nahrádzaní budú použité všetky cifry.

Ďalej vidíme, že sčítame päťciferné číslo s trojciferným a že na mieste tisícok sa mení cifra. To je možné jedine v prípade, že dochádza k prenosu zo stĺpca stoviek („prechod cez desiatku“). Vzhľadom na to, že príslušný súčet je vždy menší ako 20, musí byť $A = 9$, $L = 0$ a $U = R + 1$.

Teraz oba sčítance na mieste desiatok sú 9, teda by mohlo byť $H = 8$ alebo $H = 9$ podľa toho, či dochádza k prenosu z posledného stĺpca. Vzhľadom na to, že $H$ a $A$ majú byť rôzne, musí byť $H = 8$ a k prenosu z posledného stĺpca nedochádza. Pre cifry v tomto stĺpci preto platí $Y = M + D$.

V stĺpci na mieste stoviek prispieva prenos zo stĺpca desiatok a súčasne sám prispieva do stĺpca tisícok. Pre cifry v tomto stĺpci preto platí $10 + O = T + R + 1$. Kvôli prehľadnosti stanovené poznatky zhrnieme:

$$\begin{array}{r} R\;9\;T\;9\,M \\ R\;9\;D \\ \hline U\;0\;O\;8\;Y \end{array}, \quad \text{pričom} \quad U = R + 1, \quad O = T + R - 9, \quad Y = M + D.$$

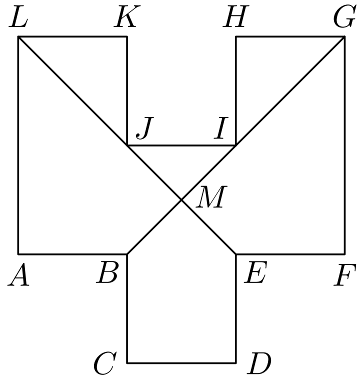
Neznáme písmená treba nahradiť ciframi od 1 do 7 tak, aby platili všetky uvedené vzťahy. Tu sa nedá vyhnúť skúšaniu, ktoré môže byť značne zdĺhavé. Vzhľadom na to, že písmeno $R$ sa opakuje, je vhodné začať skúšať odtiaľ. Ukazuje sa, že pre všetky vyhovujúce riešenia je $R = 6$, a teda $U = 7$. Zvyšné cifry od 1 do 5 môžu byť dosadené nasledovne:

$$\begin{array}{r} 6\,9\,5\,9\,1 \\ 6\,9\,3 \\ \hline 7\,0\,2\,8\,4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6\,9\,5\,9\,3 \\ 6\,9\,1 \\ \hline 7\,0\,2\,8\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\,9\,4\,9\,2 \\ 6\,9\,3 \\ \hline 7\,0\,1\,8\,5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6\,9\,4\,9\,3 \\ 6\,9\,2 \\ \hline 7\,0\,1\,8\,5 \end{array}$$

Pre uspokojivé vyriešenie úlohy stačí nájsť dve z uvedených nahradení. Zámena $M$ a $D$ je zrejmou možnosťou, ako z jedného riešenia odvodiť druhé.

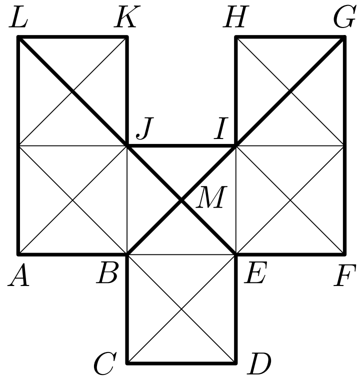
*Poznámka.* Pred samotným skúšaním si možno všimnúť, že aby platilo $O \geqq 1$, musí byť $T + R \geqq 10$. Vzhľadom na to, že žiadna z týchto cifier nemôže byť väčšia ako 7, musí byť ako $T$, tak $R$ aspoň 3. Z uvedených vzťahov ďalej vyplýva, že $Y$ musí byť tiež aspoň 3 a $U$ aspoň 4. Cifry 1 a 2 preto musia byť niektoré dve písmená z trojice $M$, $D$ a $O$.

**6.** *V dvanásťuholníku $ABCDEFGHIJKL$ sú každé dve susedné strany navzájom kolmé a všetky strany s výnimkou strán $AL$ a $GF$ sú navzájom zhodné. Strany $AL$ a $GF$ sú oproti ostatným stranám dvojnásobne dlhé. Úsečky $BG$ a $EL$ sa pretínajú v bode $M$ a rozdeľujú dvanásťuholník na šesť útvarov (tri trojuholníky, dva štvoruholníky a jeden päťuholník). Štvoruholník $EFGM$ má obsah $7\,cm^2$. Určte obsahy ostatných piatich útvarov.* (Eva Semerádová)




**Nápad.** Rozdeľte obrázok na menšie navzájom zhodné útvary.

**Riešenie.** Zo zadania vieme, že dvanásťuholník $ABCDEFGHIJKL$ pozostáva zo šiestich navzájom zhodných štvorcov. Každý z týchto štvorcov môže byť ďalej rozdelený uhlopriečkami na štyri navzájom zhodné trojuholníčky. Dvanásťuholník teda pozostáva z 24 navzájom zhodných trojuholníčkov, a to tak, že každý z vyššie menovaných útvarov je tvorený niekoľkými takýmito trojuholníčkami:




Štvoruholník $EFGM$ pozostáva zo siedmich týchto trojuholníčkov a má obsah $7\,\mathrm{cm}^2$. Jeden trojuholníček má preto obsah $1\,\mathrm{cm}^2$ a obsahy všetkých útvarov sú

$$S_{IJM} = 1\ \mathrm{cm}^2, \quad S_{IGH} = S_{JKL} = 2\ \mathrm{cm}^2,$$
$$S_{CDEMB} = 5\ \mathrm{cm}^2, \quad S_{ABML} = S_{EFGM} = 7\ \mathrm{cm}^2.$$

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

| | |
|---|---|
| Autori: | Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník |
| Recenzenti: | Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný |
| Redakčná úprava: | Peter Novotný |
| Vydal: | IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018 |