68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

---

1. *Na každej z troch kartičiek je napísaná jedna cifra rôzna od nuly (na rôznych kartičkách nie sú nutne rôzne cifry). Vieme, že akékoľvek trojciferné číslo zložené z týchto kartičiek je deliteľné šiestimi. Navyše možno z týchto kartičiek zložiť trojciferné číslo deliteľné jedenástimi. Aké cifry môžu byť na kartičkách? Určte všetky možnosti.*

(*Veronika Hucíková*)

Nápad. Ktoré cifry nemôžu byť na kartičkách?

Riešenie. Číslo je deliteľné šiestimi práve vtedy, keď je deliteľné dvoma a súčasne troma, t. j. práve vtedy, keď je párne a jeho ciferný súčet je deliteľný troma. Na všetkých kartičkách preto musia byť párne cifry a ich súčet musí byť deliteľný troma. Trojice cifier vyhovujúce týmto dvom požiadavkám sú (až na poradie):

$$2,\ 2,\ 2,\quad 2,\ 2,\ 8,\quad 2,\ 4,\ 6,\quad 2,\ 8,\ 8,\quad 4,\ 4,\ 4,\quad 4,\ 6,\ 8,\quad 6,\ 6,\ 6,\quad 8,\ 8,\ 8.$$

Teraz je potrebné pre každú trojicu vyskúšať, či možno pri niektorom usporiadaní cifier dostať trojciferné číslo deliteľné 11. To sa okrem tretej trojice nestane a pre túto trojicu dve zo šiestich možných usporiadaní dávajú číslo deliteľné 11:

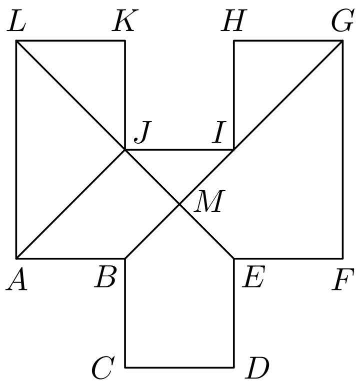
$$462 : 11 = 42, \quad 264 : 11 = 24.$$

Na kartičkách môžu byť jedine cifry 2, 4 a 6.

Poznámka. Pri overovaní deliteľnosti 11 možno výhodne využiť nasledujúce kritérium: číslo je deliteľné 11 práve vtedy, keď rozdiel súčtu cifier na párnych a na nepárnych miestach je deliteľný 11. (V našom prípade $4-6+2=0$ a $2-6+4=0$ sú deliteľné 11, ale napr. $2-4+6=4$ nie je.)

---

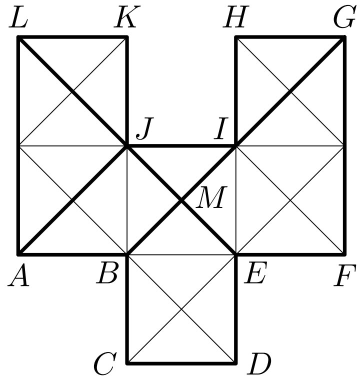
2. *V dvanásťuholníku $ABCDEFGHIJKL$ sú každé dve susedné strany navzájom kolmé a všetky strany s výnimkou strán AL a GF sú navzájom zhodné. Strany AL a GF sú oproti ostatným stranám dvojnásobne dlhé. Úsečky BG a EL sa pretínajú v bode M. Štvoruholník $ABMJ$ má obsah 1,8 cm^2. Určte obsah štvoruholníka $EFGM$.*



(*Eva Semerádová*)

Nápad. Rozdeľte obrázok na menšie navzájom zhodné útvary.

Riešenie. Zo zadania vieme, že dvanásťuholník $ABCDEFGHIJKL$ pozostáva zo šiestich navzájom zhodných štvorcov. Každý z týchto štvorcov môže byť ďalej rozdelený uhlopriečkami na štyri navzájom zhodné trojuholníčky. Dvanásťuholník teda pozostáva z 24 navzájom zhodných trojuholníčkov, a to tak, že každý z vyššie menovaných útvarov je tvorený niekoľkými takýmito trojuholníčkami:



Teraz je zrejmé, že obsahy štvoruholníka $ABMJ$ a štvoruholníka $EFGM$ sú v pomere 3 : 7. Keďže obsah štvoruholníka $ABMJ$ je $1{,}8\,\mathrm{cm}^2$, je obsah štvoruholníka $EFGM$ rovný $4{,}2\,\mathrm{cm}^2$.

---

3. *Dedo pripravil pre svojich šesť vnúčat kôpku lieskových orieškov s tým, nech si ich nejako rozoberú. Prvý prišiel Adam, odpočítal si polovicu, pribral si ešte jeden oriešok a odišiel. Rovnako sa zachoval druhý Bob, tretí Cyril, štvrtý Dano aj piaty Edo. Iba Ferko smutne hľadel na prázdny stôl; už pre neho žiadny oriešok nezvýšil. Koľko orieškov bolo pôvodne na kôpke?* (Marta Volfová)

Nápad. Koľko orieškov si vzal Edo?

Riešenie. Budeme postupovať odzadu:

Keď si Edo vzal polovicu orieškov, ktoré na neho zvýšili po Danovi, a jeden navyše, neostalo nič. Túto polovicu teda tvoril jeden oriešok. Po Danovi zvýšili dva oriešky.

Dano si tiež bral polovicu orieškov, ktoré na neho zvýšili po Cyrilovi, a jeden navyše. Túto polovicu teda tvorili oné dva oriešky plus jeden navyše. Po Cyrilovi zvýšilo šesť orieškov.

Podobne je to s ostatnými. Polovicu orieškov, ktoré zvýšili na Cyrila po Bobovi, tvorilo predchádzajúcich šesť orieškov plus jeden navyše. Po Bobovi zvýšilo 14 orieškov.

Polovicu orieškov, ktoré zvýšili na Boba po Adamovi, tvorilo predchádzajúcich 14 orieškov plus jeden navyše. Po Adamovi zvýšilo 30 orieškov.

Týchto 30 orieškov plus jeden navyše tvorilo polovicu všetkých orieškov, ktoré boli pripravené na rozobranie. Pôvodne bolo na kôpke 62 orieškov.

Poznámka. Ak z označuje počet orieškov, ktoré zvýšili po odoberaní niektorého z chlapcov, tak pred tým na kôpke bolo $2(z+1)$ orieškov. Toto je skrátený zápis opakujúcej sa myšlienky predchádzajúceho riešenia.

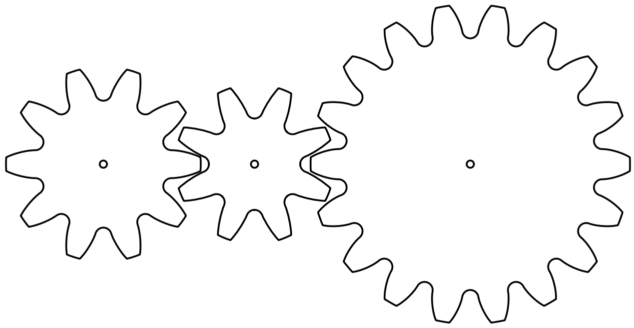
Naopak, ak n označuje počet orieškov na kôpke pred tým, ako niektorý chlapec začal odoberať, tak si vzal $\frac{n}{2}+1$ orieškov a po ňom zvýšilo $n-\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}-1$ orieškov. Opakovaním tohto kroku dostávame postupnosť zvyškov

$$n,\quad \frac{n}{2}-1,\quad \frac{n}{4}-\frac{3}{2},\quad \frac{n}{8}-\frac{7}{4},\quad \frac{n}{16}-\frac{15}{8},\quad \frac{n}{32}-\frac{31}{16},\quad \ldots$$

Keby n bol pôvodný počet orieškov, tak zvyšok po Edovi by bol $\frac{n}{32} - \frac{31}{16}$. Tento výraz je rovný nule práve vtedy, keď $n = 62$.

---

4. *Betka sa hrala s ozubenými kolesami, ktoré ukladala tak, ako je naznačené na obrázku. Keď potom zatočila jedným okolo, točili sa všetky ostatné. Nakoniec bola spokojná so súkolesím, pričom prvé koleso malo 32 a druhé 24 zubov. Keď sa tretie koleso otočilo presne osemkrát, druhé koleso urobilo päť otáčok a časť šiestej a prvé koleso urobilo štyri otáčky a časť piatej. Zistite, koľko zubov malo tretie koleso.* (Erika Novotná)



Nápad. Koľkokrát zuby prvého kolesa zapadnú medzi zuby druhého kolesa, ak sa prvé koleso otočí štyrikrát?

Riešenie. Na všetkých kolesách je počet zubov použitých pri otáčaní rovnaký (každý zub počítame toľkokrát, koľkokrát bol v kontakte s iným zubom na inom kolese). Podľa zadania vieme o tomto počte povedať nasledujúce.

Prvé koleso malo 32 zubov a urobilo štyri otáčky a časť piatej, teda bolo použitých viac ako $32 \cdot 4 = 128$ a menej ako $32 \cdot 5 = 160$ zubov. Druhé koleso malo 24 zubov a urobilo päť otáčok a časť šiestej, teda bolo použitých viac ako $24 \cdot 5 = 120$ a menej ako $24 \cdot 6 = 144$ zubov. Tretie koleso sa otočilo presne osemkrát, teda počet použitých zubov je deliteľný ôsmimi.

Dohromady, počet použitých zubov je číslo, ktoré je násobkom ôsmich, je väčšie ako 128 a menšie ako 144. Také číslo je jediné, konkrétne 136. Tretie koleso malo $136 : 8 = 17$ zubov.

---

5. *V záhradníctve Rose si jedna predajňa objednala celkom 120 ruží vo farbe červenej a žltej, druhá predajňa celkom 105 ruží vo farbe červenej a bielej a tretia predajňa celkom 45 ruží vo farbe žltej a bielej. Záhradníctvo zákazku splnilo, a to tak, že ruží rovnakej farby dodalo do každého obchodu rovnako. Koľko celkovo červených, koľko bielych a koľko žltých ruží dodalo záhradníctvo do týchto troch predajní?*

(Marta Volfová)

Nápad. Predstavte si jednotlivé objednávky v rámci celkového počtu dodaných ruží.

Riešenie. Ak sčítame počty ruží dodaných do všetkých troch predajní, dostaneme 270 kusov. V tomto súčte sú dvakrát zahrnuté počty ruží od každej farby.

V prvej predajni boli ruže červené a žlté v celkovom počte 120 kusov. Dvojnásobok tohto počtu je 240, bielych ruží dodaných do zvyšných dvoch predajní teda bolo $270 - 240 = 30$.

V druhej predajni bolo 105 ruží červených a bielych. Dvojnásobok tohto počtu je 210, žltých ruží dodaných do zvyšných dvoch predajní teda bolo $270 - 210 = 60$.

V tretej predajni bolo 45 ruží žltých a bielych. Dvojnásobok tohto počtu je 90, červených ruží dodaných do zvyšných dvoch predajní teda bolo $270 - 90 = 180$.

Poznámka. V jednotlivých predajniach boli počty ruží každej farby polovičné, teda bielych 15, žltých 30 a červených 90.

Ak by sme tieto pôvodne neznáme počty označili b, $ž$ a $č$, tak informácie zo zadania možno zapísať ako

$$č + ž = 120, \quad č + b = 105, \quad ž + b = 45.$$

Úvahy vo vyššie uvedenom riešení tak zodpovedajú nasledujúcim úpravám:

$$2č + 2ž + 2b = 270, \quad 2č + 2ž = 240, \quad \text{teda} \quad 2b = 30,$$

a podobne vo zvyšných dvoch prípadoch.

---

6. *Daný je rovnoramenný pravouhlý trojuholník ABS so základňou AB. Na kružnici, ktorá má stred v bode S a prechádza bodmi A a B, leží bod C tak, že trojuholník ABC je rovnoramenný. Určte, koľko bodov C vyhovuje uvedeným podmienkam, a všetky také body zostrojte.* (*Karel Pazourek*)

Nápad. Čo je rovnoramenný trojuholník?

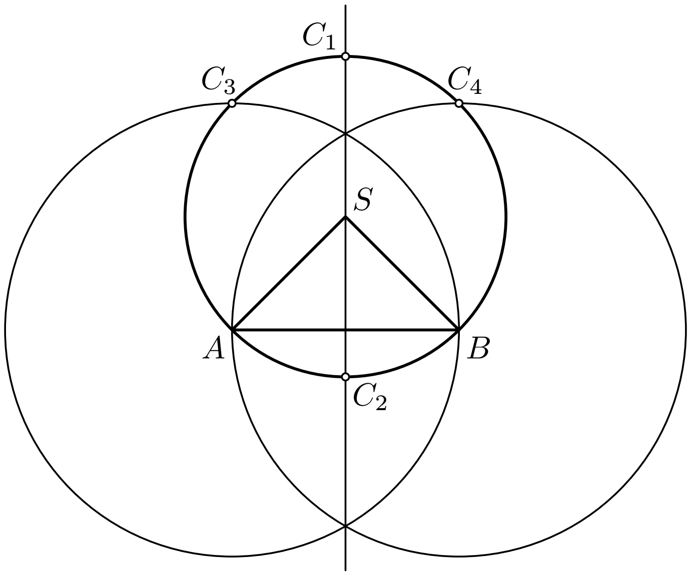
Riešenie. Strana AB rovnoramenného trojuholníka ABC môže byť buď jeho základňou, alebo ramenom. Podľa toho rozdelíme riešenie na dve časti.

a) Strana AB je základňou rovnoramenného trojuholníka ABC. V tomto prípade je C hlavným vrcholom trojuholníka ABC a leží na jeho osi súmernosti. Os súmernosti trojuholníka ABC je osou úsečky AB. Táto priamka pretína zadanú kružnicu v dvoch bodoch, čo sú dve možné riešenia úlohy, ktoré označíme C_1 a C_2.

b) Strana AB je ramenom rovnoramenného trojuholníka ABC. V tomto prípade môže byť hlavným vrcholom trojuholníka ABC buď bod A, alebo bod B. Ak by hlavným vrcholom bol bod A, tak by strana AC bola ramenom a bod C by bol od bodu A rovnako vzdialený ako bod B. Bod C by teda ležal na kružnici so stredom v bode A prechádzajúcej bodom B. Táto kružnica pretína zadanú kružnicu v jednom ďalšom bode, ktorý označíme C_3.

Podobne, ak by hlavným vrcholom bol bod B, tak by zvyšný vrchol trojuholníka ležal na kružnici so stredom v bode B prechádzajúcej bodom A. Zodpovedajúci priesečník so zadanou kružnicou označíme C_4.

Na zadanej kružnici ležia štyri body C_1, C_2, C_3, C_4 vyhovujúce podmienkam zo zadania. Konštrukcia všetkých bodov vyplýva z predchádzajúceho opisu: body C_3 a C_4 sú priesečníky danej kružnice s dvoma pomocnými kružnicami; os úsečky AB, a teda body C_1 a C_2, je určená spoločnými bodmi týchto dvoch pomocných kružníc.



Poznámka. Z pravouhlosti trojuholníka ABS vyplýva, že body A, B, C_3, C_4 tvoria vrcholy štvorca. Z toho možno vyvodiť alternatívne konštrukcie prislúchajúcich bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018