68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

1. *Fero a Dávid sa denne stretávajú vo výťahu. Raz ráno zistili, že keď vynásobia svoje súčasné veky, dostanú 238. Keby to isté urobili za štyri roky, bol by tento súčin 378. Určte súčet súčasných vekov Fera a Dávida.* (Michaela Petrová)

Nápad. Môže mať Fero (či Dávid) 8, 15 alebo 47 rokov?

Riešenie. Číslo 238 možno rozložiť na súčin dvoch čísel nasledujúcimi spôsobmi:

$$238 = 1 \cdot 238 = 2 \cdot 119 = 7 \cdot 34 = 14 \cdot 17.$$

Medzi týmito dvojicami sú súčasné veky Fera a Dávida. Po pričítaní 4 ku každému z nich máme dostať súčin 378. Preberme všetky možnosti:

$$\begin{aligned}(1+4)\cdot(238+4) &= 1210,\\ (2+4)\cdot(119+4) &= 738,\\ (7+4)\cdot(34+4) &= 418,\\ (14+4)\cdot(17+4) &= 378.\end{aligned}$$

Jediná vyhovujúca možnosť je tá posledná – jeden z chlapcov má 14 rokov, druhý 17. Súčet súčasných vekov Fera a Dávida je 31 rokov.

Poznámka. Alternatívne možno vyhovujúcu dvojicu nájsť pomocou rozkladov 378, ktoré sú:

$$378 = 1 \cdot 378 = 2 \cdot 189 = 3 \cdot 126 = 6 \cdot 63 = 7 \cdot 54 = 9 \cdot 42 = 14 \cdot 27 = 18 \cdot 21.$$

Jediné dvojice v rozkladoch 238 a 378, v ktorých sú oba činitele druhého rozkladu o 4 väčšie ako pri prvom, sú 14 a 17, resp. 18 a 21.

Extrémne hodnoty v uvedených rozkladoch možno vylúčiť ako nereálne. Ak riešiteľ s odkazom na túto skutočnosť nepreberie všetky možnosti, považujte jeho postup za správny.

Iné riešenie. Ak súčasný vek Fera označíme f a súčasný vek Dávida označíme d, tak informácie zo zadania znamenajú

$$f \cdot d = 238 \quad \text{a} \quad (f+4)\cdot(d+4) = 378.$$

Po roznásobení ľavej strany v druhej podmienke a dosadením prvej podmienky dostávame

$$\begin{aligned}238 + 4f + 4d + 16 &= 378,\\ 4(f+d) &= 124,\\ f+d &= 31.\end{aligned}$$

Súčet súčasných vekov Fera a Dávida je 31 rokov.

2. *Do triedy pribudol nový žiak, o ktorom sa vedelo, že okrem angličtiny vie výborne ešte jeden cudzí jazyk. Traja spolužiaci sa dohadovali, ktorý jazyk to je.*

Prvý súdil: „Francúzština to nie je."

Druhý hádal: „Je to španielčina alebo nemčina."

Tretí usudzoval: „Je to španielčina."

Vzápätí sa dozvedeli, že aspoň jeden z nich hádal správne a aspoň jeden nesprávne. Určte, ktorý z menovaných jazykov nový žiak ovládal. (Marta Volfová)

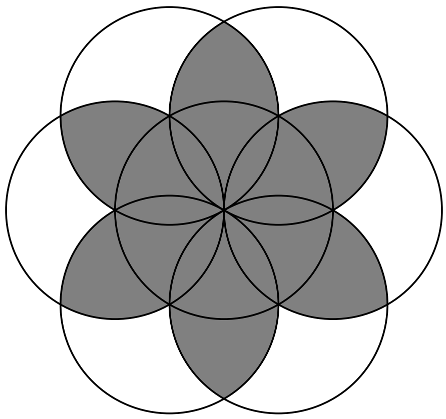
Nápad. Zaoberajte sa každým jazykom zvlášť.

Riešenie. Keby oným jazykom, ktorý nový žiak ovládal, bola francúzština, tak by všetci traja spolužiaci hádali nesprávne.

Keby oným jazykom bola španielčina, tak by všetci traja spolužiaci hádali správne.

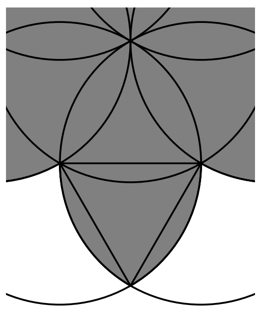
Keby oným jazykom bola nemčina, tak by prvý dvaja spolužiaci hádali správne a tretí nesprávne. Toto je jediný prípad, keď aspoň jeden spolužiak háda správne a aspoň jeden nesprávne. Nový žiak preto ovláda nemčinu.

3. *Peter narysoval pravidelný šesťuholník, ktorého vrcholy ležali na kružnici dĺžky 16 cm. Potom pre každý vrchol tohto šesťuholníka narysoval kružnicu so stredom v tomto vrchole, ktorá prechádzala jeho dvoma susednými vrcholmi. Vznikol tak útvar ako na obrázku. Určte obvod vyznačeného kvietka.* (Erika Novotná)



Nápad. Hľadajte (a zdôvodnite) navzájom zhodné časti obrázka.

Riešenie. Všetky kružnice na predchádzajúcom obrázku sú navzájom zhodné. Preto aj vyznačené úsečky na nasledujúcom obrázku sú navzájom zhodné a rovnako tak im zodpovedajúce oblúky.



Dva oblúky tvoriace okraj každého lupeňa majú dvojnásobnú dĺžku ako príslušný oblúk pôvodnej kružnice, nad ktorým bol vytvorený. Obvod kvietka je preto dvojnásobkom dĺžky pôvodnej kružnice, t. j. 32 cm.

---

4. *Na štyroch kartičkách boli štyri rôzne cifry, z ktorých jedna bola nula. Vojto z kartičiek zložil čo najväčšie štvorciferné číslo, Martin potom čo najmenšie štvorciferné číslo. Adam zapísal na tabuľu rozdiel Vojtovho a Martinovho čísla. Potom Vojto z kartičiek zložil čo najväčšie trojciferné číslo a Martin čo najmenšie trojciferné číslo. Adam opäť zapísal na tabuľu rozdiel Vojtovho a Martinovho čísla. Potom Vojto s Martinom podobne zložili dvojciferné čísla a Adam zapísal na tabuľu ich rozdiel. Nakoniec Vojto vybral čo najväčšie jednociferné číslo a Martin čo najmenšie nenulové jednociferné číslo a Adam zapísal ich rozdiel. Keď Adam sčítal všetky štyri rozdiely na tabuli, vyšlo mu 9090. Určte štyri cifry na kartičkách.* (*Lucie Růžičková*)

Nápad. Vyjadrite výsledok všeobecne pomocou neznámych cifier na kartičkách.

Riešenie. Označme tri nenulové cifry na kartičkách a, b, c a predpokladajme, že platí $a < b < c$. Vojtove čísla postupne boli $\overline{cba0}$, $\overline{cba}$, $\overline{cb}$ a c, Martinove čísla boli $\overline{a0bc}$, $\overline{a0b}$, $\overline{a0}$ a a. Adamov súčet rozdielov dvojíc týchto čísel možno v rozvinutom tvare, po úprave, vyjadriť ako $1110c + 100b - 1100a$. Podľa zadania je tento súčet rovný 9090, čo je ekvivalentné rovnici

$$111c + 10b - 110a = 909, \tag{1}$$

pričom $0 < a < b < c < 10$. Keďže na mieste jednotiek prispieva iba prvý sčítanec, musí byť $c = 9$. Po dosadení a úprave dostávame

$$11a - b = 9,$$

pričom $0 < a < b < 9$. Jediným riešením tejto úlohy je dvojica $a = 1$ a $b = 2$. (Keby $a \geqq 2$, muselo by byť $b \geqq 13$, čo nie je možné.)

Na kartičkách boli cifry 0, 1, 2 a 9.

Poznámka. Keby sme sa pri Adamovom súčte sústredili na hodnoty na mieste jednotiek, desiatok atď., dostaneme namiesto rovnice (1) ekvivalentnú rovnicu

$$100(c - a) + 10(b + c - a) + c = 909.$$

Z toho vyplýva, že $c = 9$ a ďalej buď $b + c - a = 0$, $c - a = 9$, alebo $b + c - a = 10$, $c - a = 8$. Keďže a a c sú rôzne nenulové čísla, je rozdiel $c - a$ rôzny od c. Preto musí nastať druhá možnosť a postupným dosadzovaním určíme $a = 1$ a $b = 2$.

---

5. *Kráľ dal murárovi Václavovi za úlohu postaviť múr hrubý 25 cm, dlhý 50 m a vysoký 2 m. Ak by Václav pracoval bez prestávky a rovnakým tempom, postavil by múr za 26 hodín. Podľa platných kráľovských nariadení však musí Václav dodržiavať nasledujúce podmienky:*

- *Počas práce musí spraviť práve šesť polhodinových prestávok.*
- *Na začiatku práce a po každej polhodinovej prestávke, keď je dostatočne oddýchnutý, môže pracovať o štvrtinu rýchlejšie ako normálnym tempom, ale nie dlhšie ako jednu hodinu.*
- *Medzi prestávkami musí pracovať najmenej 3/4 hodiny.*

Za aký najkratší čas môže Václav splniť zadanú úlohu? (Jakub Norek)

Nápad. Môže Václav rozvrhnúť prestávky tak, aby plne využil svoju oddýchnutosť?

Riešenie. Václav musí spraviť práve šesť polhodinových prestávok. Tým stratí $6 \cdot 1/2 = 3$ hodiny. Prestávky môže rozvrhnúť tak, že na začiatku práce a po každej prestávke môže pracovať celú hodinu zvýšeným tempom (napr. pri rovnomernom rozdelení). Tým získa $7 \cdot 1/4$ hodín, t. j. 1 hodinu a 45 minút.

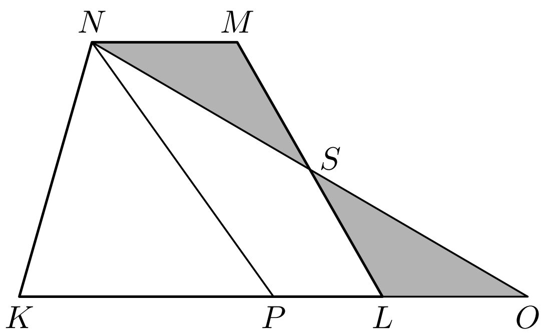
Bez prestávok normálnym tempom by Václav pracoval 26 hodín. So všetkými povinnými prestávkami a všetkými dovolenými zvýšeniami tempa by Václav pracoval $26 + 3 - 7/4$ hodín, t. j. 27 hodín a 15 minút. To je najkratšia doba, za ktorú môže svoju úlohu splniť.

---

6. *V lichobežníku $KLMN$ má základňa KL veľkosť 40 cm a základňa MN má veľkosť 16 cm. Bod P leží na úsečke KL tak, že úsečka NP rozdeľuje lichobežník na dve časti s rovnakými obsahmi. Určte veľkosť úsečky KP.* (Libuše Hozová)

Nápad. Pozmeňte útvary tak, aby sa vám ľahšie porovnávali ich obsahy.

Riešenie. Úsečka NP rozdeľuje lichobežník $KLMN$ na trojuholník KPN a lichobežník $PLMN$. Lichobežník $KLMN$ má rovnaký obsah ako trojuholník KON, pričom bod O na priamke KL je obrazom bodu N vzhľadom na stredovú súmernosť podľa stredu úsečky LM. Podobne, lichobežník $PLMN$ má rovnaký obsah ako trojuholník PON.



Úsečka NP rozdeľuje lichobežník $KLMN$ na dve časti s rovnakým obsahom práve vtedy, keď P je stredom úsečky KO. Vzhľadom na to, že $|KO| = |KL| + |LO|$ a $|LO| = |MN|$, platí

$$|KP| = \frac{40 + 16}{2} = 28\,(\text{cm}).$$

Poznámka. V úvodnej časti predchádzajúceho riešenia je naznačené odvodenie známeho vzorca $S = \frac{(a+c)v}{2}$ pre obsah lichobežníka so základňami a a c a výškou v. Dosadením možno požiadavku zo zadania vyjadriť pomocou rovnice

$$\frac{x \cdot v}{2} = \frac{(40 + 16 - x)v}{2},$$

pričom $x = |KP|$.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018