2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

1. *Určte všetky dvojice celých kladných čísel a, b, pre ktoré platí*

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

(*Martin Panák*)

Riešenie. Z rovnice vyplýva, že b^2 je párne číslo väčšie ako 4^a, teda b je párne číslo väčšie ako párne číslo 2^a. Musí preto platiť $b \geqq 2^a + 2$, odkiaľ

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geqq (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4.$$

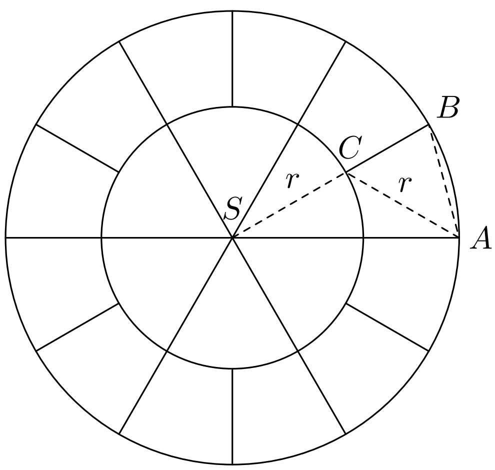
Porovnaním krajných výrazov dostaneme $a^2 \geqq 2^a$, čo znamená, že $a \leqq 4$. Dokážeme totiž indukciou, že opačná nerovnosť $a^2 < 2^a$ platí pre každé celé $a \geqq 5$. Pre $a = 5$ je to tak $(25 < 32)$. Ak platí $a^2 < 2^a$ pre niektoré $a \geqq 5$, tak po vynásobení dvoma dostaneme $2a^2 < 2^{a+1}$. Takže žiadaná nerovnosť $(a+1)^2 < 2^{a+1}$ je dôsledkom nerovnosti $(a+1)^2 < 2a^2$, ktorá je zrejmá, lebo je ekvivalentná s nerovnosťou $1 < a(a-2)$, ktorá platí triviálne, nech je $a \geqq 5$ akékoľvek. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Ukázali sme, že v každej hľadanej dvojici (a, b) musí platiť $a \leqq 4$. Postupným dosadením hodnôt $a = 1, 2, 3, 4$ do rovnice $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ zistíme, že úloha má práve dve riešenia, a to $(a, b) = (2, 6)$ a $(a, b) = (4, 18)$.

---

2. *Kruhový terč s polomerom* 12 cm *zasiahlo 19 výstrelov. Dokážte, že vzdialenosť niektorých dvoch zásahov je menšia ako* 7 cm. (*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

Riešenie. Označme $r = 4\sqrt{3}$ cm a celý terč s polomerom 12 cm $= r\sqrt{3}$ rozdeľme na 18 častí. Prvých šesť častí budú zhodné výseky so stredovým uhlom 60° v kruhu s polomerom r uprostred terča. Zvyšné medzikružie rozdelíme na 12 zhodných „medzivýsekov“ so stredovým uhlom 30° (obr. 1).



Obr. 1

Označme podľa obrázka S stred terča a A, B, C vrcholy jedného zo spomenutých medzivýsekov. Keďže kružnice ohraničujúce tieto časti majú polomery r a $r\sqrt{3}$ a keďže

$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, je zrejme trojuholník SAC rovnoramenný, takže $|AC| = r$; navyše AC je najdlhšou stranou v trojuholníku ABC, ktorý má vnútorné uhly 45°, 75° a 60°. Preto je maximálna vzdialenosť dvoch bodov jedného medzivýseku rovná r, rovnako ako maximálna vzdialenosť dvoch bodov každého zo 6 výsekov stredového kruhu s polomerom r. Podľa Dirichletovho princípu niektoré dva z 19 zásahov ležia v rovnakej z 18 vytvorených častí, takže ich vzdialenosť je najviac r. Dôkaz je ukončený, pretože $4\sqrt{3} < 7$ ($\Leftrightarrow 48 < 49$).

Poznámka. Uvažujme tvrdenie: *Ak je v kruhu s polomerom $r\sqrt{3}$ vybraných N bodov, tak je vzdialenosť niektorých dvoch z nich nanajvýš r.* Keby sme chceli také tvrdenie dokázať porovnaním súčtu obsahov N zhodných kruhov s priemerom r s obsahom kruhu s priemerom $r\bigl(1 + 2\sqrt{3}\bigr)$, podarí sa nám to práve vtedy, keď bude platiť

$$N \cdot \frac{\pi r^2}{4} > \frac{\pi r^2\bigl(1 + 2\sqrt{3}\bigr)^2}{4}, \quad \text{čiže} \quad N > 13 + 4\sqrt{3} \doteq 19{,}9.$$

V situácii danej úlohy, keď je odhad r vzdialenosti dvoch bodov nahradený väčšou hodnotou $r_1 = r \cdot \dfrac{7}{4\sqrt{3}}$, má podobná podmienka tvar

$$N \cdot \frac{\pi r_1^2}{4} > \frac{\pi\bigl(r_1 + 2r\sqrt{3}\bigr)^2}{4}, \quad \text{po dosadení} \quad N > \Bigl(1 + \frac{24}{7}\Bigr)^2 \doteq 19{,}6.$$

Preto nemožno takto jednoduchým postupom dôjsť k riešeniu úlohy.

---

3. *Rumburak uniesol na svoj hrad 31 členov strany A, 28 členov strany B, 23 členov strany C, 19 členov strany D a každého zavrel do samostatnej cely. Po práci sa občas mohli prechádzať po dvore a rozprávať sa. Akonáhle sa spolu začali rozprávať traja členovia troch rôznych strán, Rumburak ich za trest preregistroval do štvrtej strany. (Nikdy sa spolu nerozprávali viac ako traja unesení.)*

a) *Mohlo sa stať, že po určitom čase boli všetci unesení členmi jednej strany? Ktorej?*

b) *Určte všetky štvorice celých kladných čísel, ktorých súčet je* 101 *a ktoré ako počty unesených členov štyroch strán umožňujú, aby sa Rumburakovým pričinením stali časom všetci členmi jednej strany.*

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

Riešenie. a) Označme a, b, c, d (premenné) počty unesených členov strán A, B, C, D. Úvodná štvorica $(a, b, c, d) = (31, 28, 23, 19)$ je podľa parity čísel typu (n, p, n, n), kde p, n označuje párne, resp. nepárne číslo. Keďže pri každom preregistrovaní sa parita všetkých čísel a, b, c, d zmení (tri z nich sa totiž zmenšia o 1 a štvrté zväčší o 3), štvorica typu (n, p, n, n) sa zmení na štvoricu typu (p, n, p, p) a tá potom zase späť na štvoricu typu (n, p, n, n). Ak teda dostaneme nakoniec štvoricu s tromi nulami, musí byť táto štvorica typu (p, n, p, p), takže všetci unesení vtedy budú členmi strany B.

Nasledujúca tabuľka zmien hodnôt a, b, c, d ukazuje, že sa všetci unesení môžu naozaj stať členmi strany B:

a:	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	...	0
b:	28	27	26	25	24	23	26	29	32	35	...	101
c:	23	22	25	24	27	26	25	24	23	22	...	0
d:	19	22	21	24	23	26	25	24	23	22	...	0

b) Ukážeme, že hľadané štvorice (a, b, c, d) sú práve tie, v ktorých *niektoré tri čísla dávajú po delení štyrmi rovnaký zvyšok.*

Z rovnosti $a+b+c+d=101$ vyplýva, že tri z čísel a, b, c, d majú rovnakú paritu a štvrté paritu opačnú. Vzhľadom na symetriu hľadajme úvodné štvorice (a, b, c, d) za predpokladu

$$a \equiv b \equiv c \not\equiv d \pmod 2$$

a podľa riešenia časti a) skúmajme, kedy sa všetci unesení môžu stať členmi strany D. Z toho, ako sa menia počty a, b, c, d pri každom preregistrovaní (tri sa zmenšia o 1 a jedno zväčší o 3), vyplýva, že rozdiely $a-b$, $a-c$, $b-c$ nemenia svoje zvyšky po delení štyrmi. Ak má na konci platiť $a=b=c=0$, musia byť uvedené tri rozdiely už na začiatku deliteľné štyrmi, takže úvodné počty a, b, c musia spĺňať podmienku

$$a \equiv b \equiv c \pmod 4. \tag{1}$$

Ukážeme, že podmienka (1) je pre splnenie želaného cieľa $a=b=c=0$ aj postačujúca. Zrejme stačí ukázať, že úvodnú štvoricu (a, b, c, d) spĺňajúcu podmienku (1) možno po niekoľkých krokoch zmeniť na štvoricu typu (e, e, e, f), potom už totiž stačí opakovať úpravu $(e, e, e, f) \to (e-1, e-1, e-1, f+3)$.

Majme teda štvoricu celých kladných čísel (a, b, c, d) so súčtom 101, ktorá spĺňa podmienku (1), a predpokladajme, že ešte neplatí $a=b=c$. Ukážeme, ako v tomto prípade dovolenými krokmi zväčšiť hodnotu d (o 1 alebo 2). Keďže vždy $d \leqq 101$, dá sa také zväčšenie zopakovať len niekoľkokrát, potom už dosiahneme želaný cieľ.

Procedúru zväčšenia d určite stačí opísať v prípade, keď $a \geqq b \geqq c$ a $a>c$, teda $a-c \geqq 4$ vďaka podmienke (1).[1] Poraďme Rumburakovi dvojicu krokov

$$(a, b, c, d) \to (a-1, b-1, c+3, d-1) \to (a-2, b-2, c+2, d+2),$$

ktorá zvyšuje hodnotu d o 2. Túto dvojicu krokov nemožno urobiť iba v prípade $b=1$, kedy však z (1) a nerovnosti $b \geqq c$ vyplýva aj $c=1$. Na takú štvoricu $(a, 1, 1, d)$, pričom $a \geqq 5$ a $d \geqq 2$ (nemôže byť aj $d=1$, pretože d má odlišnú paritu), použije Rumburak trojicu krokov

$$(a, 1, 1, d) \to (a-1, 4, 0, d-1) \to (a-2, 3, 3, d-2) \to (a-3, 2, 2, d+1),$$

ktorá zvyšuje hodnotu d o 1.

Tvrdenie o tvare všetkých vyhovujúcich štvoríc z prvej vety riešenia časti b) je dokázané.

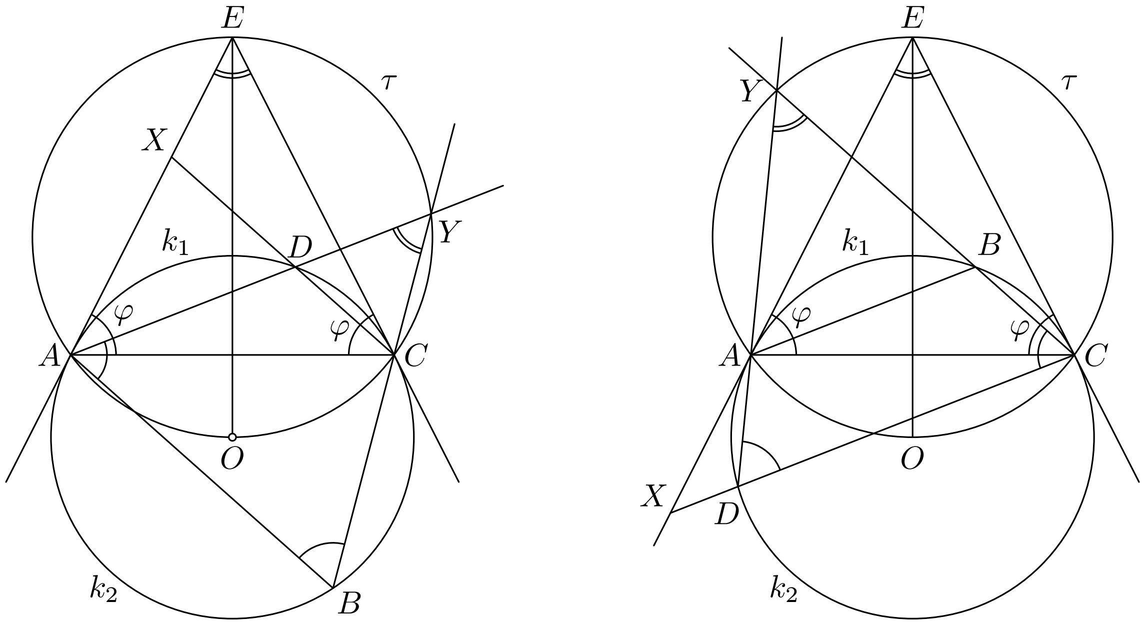
---

4. *Je daná kružnica k s tetivou AC, ktorá nie je priemerom. Na jej dotyčnici vedenej bodom A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D priesečník kružnice k s vnútrom úsečky XC (ak existuje). Trojuholník ACD doplníme na lichobežník $ABCD$ vpísaný do kružnice k. Určte množinu priesečníkov priamok BC a AD prislúchajúcich všetkým takým lichobežníkom.* (*Pavel Leischner*)

Riešenie. Budeme uvažovať iba také lichobežníky $ABCD$, v ktorých platí $AB \parallel CD$, pri ostatných priesečník (rovnobežných) priamok BC a AD neexistuje.

[1] Zdôrazníme, že nevylučujeme rovnosť $c=0$. Ku štvorici s nulovým prvkom nás totiž dovedie v ďalšej vete opísaná dvojica krokov v prípade, že $b=2$.

Označme O stred kružnice k a E priesečník jej dotyčníc vedených bodmi A, C (obr. 2). Ako vieme, body A, C ležia na Tálesovej kružnici τ nad priemerom OE a sú podľa tohto priemeru súmerne združené. Spoločnú veľkosť ostrých uhlov pri základni AC rovnoramenného trojuholníka ACE označme φ. Napokon, vnútra kratšieho a dlhšieho oblúka AC kružnice k označme k_1, resp. k_2.



Obr. 2 Obr. 3

a) Zvoľme na dotyčnici AE ľubovoľný bod X, $X \neq A$. Kružnica k zrejme pretne úsečku XC vo vnútornom bode D práve vtedy, keď bod X je buď vnútorným bodom úsečky AE, alebo vnútorným bodom polpriamky opačnej k polpriamke AE. Oba prípady (obr. 2 a obr. 3) teraz posúdime samostatne.

V prvom prípade platí $D \in k_1$ a $B \in k_2$, takže podľa vety o úsekovom uhle je uhol ABC rovný ostrému uhlu φ. Rovnakú veľkosť má aj uhol BAD, pretože každý tetivový lichobežník je rovnoramenný. Bod Y, priesečník rôznobežných polpriamok BC a AD, teda leží v polrovine ACE. Z rovnoramenných trojuholníkov ABY a ACE preto vyplýva, že uhly AYC a AEC sú zhodné (majú veľkosť $\pi - 2\varphi$). Podľa vety o obvodovom uhle leží bod Y na oblúku AEC kružnice τ, presnejšie vnútri kratšieho z jej oblúkov CE, lebo polpriamka AD leží v uhle CAE.

V druhom prípade je úvaha analogická a zapíšeme ju stručne: $D \in k_2$, $B \in k_1$, $|\measuredangle ADC| = \varphi = |\measuredangle BCD|$, priesečník Y rôznobežných polpriamok CB a DA leží v polrovine ACE, a keďže $|\measuredangle AYC| = |\measuredangle AEC|$, leží bod Y na kružnici τ, a to vnútri jej kratšieho oblúka AE.

b) Ukážeme teraz, že naopak každý vnútorný bod Y kratších oblúkov CE a AE kružnice τ je priesečníkom priamok BC a AD niektorého z uvažovaných lichobežníkov $ABCD$. Opäť rozoberieme dva prípady podľa toho, na ktorom z oboch oblúkov bod Y leží.

Ak je Y vnútorný bod oblúka CE, dajú sa zrejme zostrojiť body $D \in k_1$ a $B \in k_2$ tak, aby body A, D, Y resp. B, C, Y ležali v uvedenom poradí na jednej priamke.

Z $D \in k_1$ vyplýva existencia priesečníka X polpriamky CD s vnútrom úsečky AE (bod D potom zodpovedá bodu X podľa konštrukcie zo zadania úlohy). Ostáva objasniť, prečo $AB \parallel CD$. Keďže body O a Y ležia na rôznych oblúkoch AC kružnice τ a pritom $|AO| = |CO|$, je polpriamka YO osou uhla AYC, takže priamky $A(D)Y$ a $B(C)Y$ sú súmerne združené podľa priamky YO, ktorá je (triviálne) osou súmernosti kružnice k, lebo prechádza jej stredom. Preto podľa tejto osi musia byť súmerne združené aj priesečníky oboch spomenutých priamok $A(D)Y$ a $B(C)Y$ s kružnicou k, teda (vďaka určenému poradiu bodov) jednak body A a B, jednak body D a C. Obe úsečky AB a CD sú preto kolmé na priamku OY, a sú teda rovnobežné.

Ak je Y vnútorným bodom oblúka AE, zostrojíme body $D \in k_2$ a $B \in k_1$ tak, aby na priamke ležali body v poradí D, A, Y, resp. C, B, Y. Polpriamka CD pretne priamku AE v potrebnom bode X (keďže $D \neq A$, bude určite $X \neq A$), ak platí $|\measuredangle AEC| + |\measuredangle ECD| < \pi$. To overíme tak, že použijeme vetu o obvodovom a úsekovom uhle v kružnici k, podľa ktorej $|\measuredangle ECD| = \pi - |\measuredangle CAD| = |\measuredangle CAY|$, a keďže $|\measuredangle AEC| = |\measuredangle AYC|$, je súčet $|\measuredangle AEC| + |\measuredangle ECD|$ rovný súčtu dvoch uhlov v trojuholníku ACY. Zo združenosti priamok $D(A)Y$ a $C(B)Y$ podľa osi OY uhla AYC potom opäť vyplýva požadovaná rovnobežnosť $AB \parallel CD$.

Záver. Hľadanou množinou je zjednotenie vnútier kratších oblúkov CE a AE Tálesovej kružnice τ.

---

5. *Na tabuli sú napísané čísla* 1, 2, ..., 33. *V jednom kroku zvolíme dve čísla napísané na tabuli, ktorých súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla, obe zvolené čísla zotrieme a na tabuľu napíšeme druhú odmocninu z ich súčinu. Takto pokračujeme, až na tabuli ostanú iba také čísla, že súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich tým istým číslom.) Dokážte, že na tabuli ostane aspoň 16 čísel.* (Peter Novotný)

Riešenie. V jednom kroku nahradíme vždy dve čísla a, b jedným prirodzeným číslom $\sqrt{ab}$. Keďže pre ľubovoľné $a \leqq b$ platí $a \leqq \sqrt{ab} \leqq b$, je zrejmé, že na tabuli budú stále zapísané iba čísla z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 33\}$. Pritom ak je číslo a prvočíslom alebo súčinom niekoľkých rôznych prvočísel, musia tieto prvočísla byť obsiahnuté aj v rozklade čísla $\sqrt{ab}$, takže $\sqrt{ab} = ka$, čiže $b = k^2a$ pre niektoré prirodzené k. Ak $k = 1$, musí byť číslo a na tabuli zapísané viackrát. Ak $k \geqq 2$, a teda $b = k^2a \geqq 4a$, musí platiť $4a \leqq 33$, a preto z $b = k^2a \in \mathsf{M}$ vyplýva aj $4a \in \mathsf{M}$. Na tabuli teda ostanú až do konca jednak všetky prvočísla, ktoré majú v množine M práve jeden násobok, jednak všetky tie $a \in \mathsf{M}$, ktoré sú súčinom niekoľkých rôznych prvočísel a zároveň spĺňajú podmienku $4a > 33$, čiže $a \geqq 9$. Spolu sa jedná celkom o 15 nezotriteľných čísel

$$10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 22,\ 23,\ 26,\ 29,\ 30,\ 31,\ 33.$$

Ukážeme, že okrem nich bude na tabuli vždy zastúpené aspoň jedno číslo z množiny $\mathsf{S} = \{6, 12, 18, 24\}$ (na začiatku tam sú všetky). Ak zvolíme v jednom kroku čísla a a b, pričom napr. $a \in \mathsf{S}$, a nahradíme ich číslom $n = \sqrt{ab}$, musí byť aj číslo n násobkom šiestich, ktorý navyše vďaka odhadom $a \leqq 24$ a $b \leqq 33$ spĺňa nerovnosť $n \leqq \sqrt{24 \cdot 33} = 6\sqrt{22} < 30$, takže bude platiť $n \in \mathsf{S}$. Na tabuli po ľubovoľnom počte krokov teda ostane 15 vyššie zapísaných čísel a aspoň jedno číslo z S, teda aspoň 16 čísel, ako sme mali dokázať.

Poznámka. Počet 16 čísel na tabuli možno dostať napríklad po 17 krokoch opísaných v nasledujúcich riadkoch tak, že zotierané čísla v každom kroku sú sivé, zatiaľ čo nové číslo je pripísané na konci ďalšieho riadku:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33;
1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,14;
1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,14;
1,2,3,4,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,14,10;
1,2,3,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27,29,30,31,32,33,14,10,10;
1,2,3,6,8,9,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27,29,30,31,32,33,14,10,10;
1,2,3,6,8,9,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27,29,30,31,32,33,14,10;
1,2,3,6,8,9,11,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,29,30,31,32,33,14,10,18;
1,2,3,8,9,11,13,15,16,17,18,19,21,22,23,26,29,30,31,32,33,14,10,18,12;
1,2,3,8,9,11,13,15,16,17,19,21,22,23,26,29,30,31,32,33,14,10,12,18;
1,3,8,9,11,13,15,16,17,19,21,22,23,26,29,30,31,32,33,14,10,12,6;
1,3,9,11,13,15,16,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,12,6,16;
1,3,9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,12,6,16;
3,9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,12,6,4;
9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6,4,6;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6,6,6;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6,6;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6.

---

6. *Nájdite minimum výrazu*

$$\frac{a+b+c}{2}-\frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c},$$

pričom premenné a, b, c sú ľubovoľné celé čísla väčšie ako 1 a $[x,y]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel x, y. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Vzhľadom na symetriu stačí uvažovať trojice (a,b,c), v ktorých $a \geqq b \geqq$ $\geqq c$. Pre „najmenšie" z nich $(2,2,2)$, $(3,2,2)$, $(3,3,2)$, $(3,3,3)$ a $(4,2,2)$ má daný výraz hodnoty 2, 3/2, 17/8, 7/2, resp. 11/4. Ak ukážeme, že pre všetky ostatné trojice (a,b,c), ktoré už spĺňajú podmienku $a+b+c \geqq 9$, platí nerovnosť

$$\frac{a+b+c}{2}-\frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c} \geqq \frac{3}{2},$$

bude to znamenať, že hľadaná najmenšia hodnota je rovná 3/2. Uvedenú nerovnosť ekvivalentne upravme:

$$(a+b+c)^2-2([a,b]+[b,c]+[c,a]) \geqq 3(a+b+c),$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab-[a,b])+2(bc-[b,c])+2(ca-[c,a]) \geqq 3(a+b+c).$$

Keďže zrejme platí $xy \geqq [x,y]$ pre ľubovoľné x, y, zanedbáme nezáporné dvojnásobky na ľavej strane poslednej nerovnosti a dokážeme (silnejšiu) nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 3(a+b+c). \tag{1}$$

Z predpokladu $a+b+c \geqq 9$ a Cauchyho nerovnosti $3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$ vyplýva

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3(a+b+c) \cdot \frac{a+b+c}{9} \geqq 3(a+b+c),$$

a dôkaz je hotový.

Poznámky. Namiesto Cauchyho nerovnosti sme mohli prepísať (1) na tvar

$$\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \geqq \frac{27}{4}$$

a túto nerovnosť zdôvodniť umocnením zrejmých nerovností

$$a - \frac{3}{2} \geqq \frac{5}{2}, \quad b - \frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad c - \frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2},$$

lebo uvažujeme už len trojice, v ktorých $a \geqq 4$, $b \geqq c \geqq 2$.

Postup z riešenia vedie dokonca k výsledku, že pre ľubovoľné celé čísla a, b, c väčšie ako 1 platí nerovnosť

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c} \geqq \frac{a+b+c}{6}.$$