

2009/2010  
59. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie C

(Súťaž sa konala v utorok 30. marca 2010.)

1. Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla  $n$  a  $k$  väčšie ako 1 je číslo  $n^{k+2} - n^k$  deliteľné dvanástimi. (Vojtech Bálint)

2. Dokážte, že pre ľubovoľné čísla  $a, b$  z intervalu  $\langle 1, \infty \rangle$  platí nerovnosť

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a - 1)^2(b - 1)^2 \geq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

(Jaromír Šimša)

3. Daná je kružnica  $k$  so stredom  $S$ . Kružnica  $l$  má väčší polomer ako kružnica  $k$ , prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch  $M$  a  $N$ . Priamka, ktorá prechádza bodom  $N$  a je rovnobežná s priamkou  $MS$ , vytína na kružniciach tetivy  $NP$  a  $NQ$ . Dokážte, že trojuholník  $MPQ$  je rovnoramenný. (Tomáš Jurík)

4. Určte všetky dvojice reálnych čísel  $x, y$ , ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\lfloor x + y \rfloor = 2010,$$

$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ak a)  $p = 2$ , b)  $p = 3$ .

Symbol  $\lfloor x \rfloor$  označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo  $x$  (tzv. dolná celá časť reálneho čísla  $x$ ). (Jaroslav Švrček)