2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

1. *Kružnica $l(T;s)$ prechádza stredom kružnice $k(S;2\,\mathrm{cm})$. Kružnica $m(U;t)$ sa zvonka dotýka kružníc k a l, pričom $US \perp ST$. Polomery s a t vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Určte ich.* (Pavel Leischner)

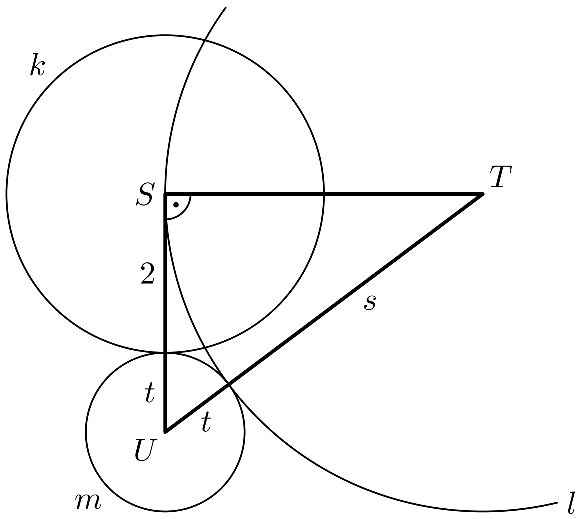
Riešenie. Trojuholník UST je pravouhlý. Jeho prepona UT má dĺžku $s+t$, dĺžky odvesien sú $|US| = t+2$, $|ST| = s$ (obr. 1). Podľa Pytagorovej vety platí

$$(s+t)^2 = (t+2)^2 + s^2.$$

Úpravami postupne dostávame

$$\begin{aligned} s^2 + 2st + t^2 &= t^2 + 4t + 4 + s^2,\\ st &= 2t + 2,\\ t(s-2) &= 2. \end{aligned}$$

Čísla t a $s-2$ sú celé, preto t musí byť deliteľom čísla 2. Keďže t je kladné, sú len dve možnosti; ak $t = 1\,\mathrm{cm}$, tak $s = 4\,\mathrm{cm}$, a ak $t = 2\,\mathrm{cm}$, tak $s = 3\,\mathrm{cm}$.



Obr. 1

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Prideľte jeden bod za vyjadrenie dĺžok strán trojuholníka UST, dva body za použitie Pytagorovej vety, jeden bod za úpravu na tvar $t(s-2) = 2$ a dva body za nájdenie oboch riešení.

2. *V matematickej súťaži bolo zadaných 7 úloh a za každú z nich mohol súťažiaci získať 0, 1 alebo 2 body. Súťaže sa zúčastnilo 60 žiakov. Za každú úlohu bolo udelených aspoň 95 bodov. Dokážte, že medzi súťažiacimi nájdeme dvoch takých, že každú z úloh vyriešil aspoň jeden z nich za 2 body.* (Ján Mazák)

Riešenie. Najprv dokážeme, že každú úlohu vyriešilo za dva body aspoň 35 žiakov: Keby niektorú úlohu vyriešilo za 2 body a súťažiacich, pričom $a < 35$, bolo by za túto úlohu pridelených najviac $2a + 60 - a < 95$ bodov, čo je v rozpore so zadaním. Celkový počet dvojbodových riešení je preto aspoň $7 \cdot 35 = 245$. Keďže $245 > 4 \cdot 60$, musel niektorý žiak vyriešiť za dva body aspoň 5 úloh.

Ďalej budeme namiesto „vyriešiť úlohu za dva body“ písať stručnejšie len „vyriešiť úlohu“. Ak niektorý žiak vyriešil všetkých 7 úloh, môžeme k nemu pridať ľubovoľného druhého žiaka. Ak niektorý žiak vyriešil 6 úloh, pridáme k nemu ktoréhokoľvek zo žiakov, ktorí vyriešili zvyšnú úlohu (máme z čoho vyberať, pretože každú úlohu vyriešilo aspoň 35 žiakov). Nakoniec uvažujme situáciu, keď niektorý súťažiaci A vyriešil presne 5 úloh. Každú z dvoch zvyšných úloh vyriešilo aspoň 35 žiakov (iných ako A). A keďže všetkých žiakov iných ako A je 59, musí medzi nimi byť aspoň $2 \cdot 35 - 59 = 11$ takých, ktorí vyriešili obidve tieto úlohy. Ľubovoľného z nich môžeme pridať k žiakovi A.

Iné riešenie. „Vyriešiť úlohu“ bude znamenať to isté ako v prvom riešení.

Za všetkých 7 úloh dokopy bolo udelených aspoň $95 \cdot 7 = 665 > 60 \cdot 11$ bodov, takže niektorý žiak získal aspoň 12 bodov, a teda vyriešil aspoň päť úloh (žiak, ktorý vyriešil práve k úloh, získal totiž najviac $2k + (7 - k) = k + 7$ bodov). Vyberme teda žiaka A a 5 konkrétnych úloh z tých, ktoré vyriešil. Za zvyšné dve úlohy získalo zvyšných 59 žiakov aspoň $2 \cdot (95 - 2) = 186 > 3 \cdot 59$ bodov, takže jeden z nich, povedzme žiak B, získal 4 body, a teda vyriešil obe úlohy. Dvojica žiakov A, B má požadovanú vlastnosť.

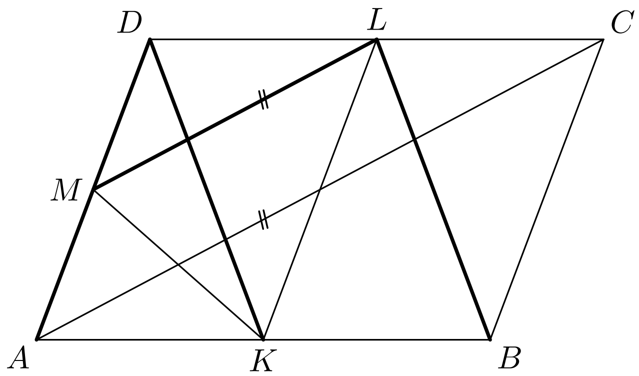
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Prideľte jeden bod za poznatok, že každú úlohu vyriešilo za dva body aspoň 35 žiakov, dva body za dôkaz, že niektorý žiak vyriešil aspoň 5 úloh. Za vyriešenie úlohy pre prípad, že niektorý súťažiaci mal 6 alebo 7 dvojbodových úloh, dajte jeden bod, 2 body za vyriešenie situácie, keď niektorý žiak mal 5 dvojbodových úloh.

---

3. *V rovine je daný rovnobežník $ABCD$. Označme postupne K, L, M stredy strán AB, CD, AD. Predpokladajme, že body A, B, L, D ležia na jednej kružnici a súčasne aj body K, L, D, M ležia na jednej kružnici. Dokážte, že $|AC| = 2 \cdot |AD|$.*

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Lichobežníky $ABLD$ a $KLDM$ sú rovnoramenné, pretože sú tetivové. Odtiaľ vyplýva zhodnosť ramien $|AD| = |BL|$ a zhodnosť uhlopriečok $|KD| = |LM|$ (obr. 2). Úsečky KB a DL sú rovnobežné a zhodné, preto je $KBLD$ rovnobežník a platí $|KD| = |BL|$. Úsečka ML je strednou priečkou trojuholníka ACD, preto $|AC| = 2 \cdot |ML|$. Spojením uvedených rovností máme $|AC| = 2 \cdot |ML| = 2 \cdot |KD| = 2 \cdot |BL| = 2 \cdot |AD|$.



Obr. 2

Iné riešenie. Budeme postupovať rovnako ako v druhom riešení tretej úlohy domáceho kola (je možné odvolať sa na domáce kolo bez dôkazu): Keďže $ABLD$ je tetivový (a teda rovnoramenný) lichobežník, je $|KD| = |BL| = |AD|$. Podobne je aj lichobežník $KLDM$ rovnoramenný, takže $|MK| = |DL|$ a $|DB| = 2|MK| = 2|DL| = |DC| = |AB|$. Z podobnosti rovnoramenných trojuholníkov AKD a DAB (zhodujú sa v uhle pri vrchole A svojich základní) potom vyplýva, že $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$, odkiaľ po dosadení $|AK| = \frac{1}{2}|AB|$ vychádza $|DB| = |AB| = \sqrt{2}\cdot|AD|$. Ďalej využijeme známu rovnobežníkovú rovnosť $|AC|^2 + |BD|^2 = 2\cdot|AB|^2 + 2\cdot|AD|^2$. Dosadením dostaneme $|AC|^2 + 2\cdot|AD|^2 = 4\cdot|AD|^2 + 2\cdot|AD|^2$ a odtiaľ $|AC|^2 = 4\cdot|AD|^2$ čiže $|AC| = 2\cdot|AD|$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho jeden bod za poznatok, že lichobežníky $ABLD$ a $KLDM$ sú rovnoramenné (túto dobre známu vlastnosť tetivových lichobežníkov nie je nutné dokazovať), po jednom bode za každú z rovností $|AC| = 2\cdot|ML|$, $|AD| = |BL|$, $|KD| = |LM|$, $|KD| = |BL|$ a jeden bod za ich spojenie.

V prípade druhého postupu dajte 2 body za rovnosti $|BD| = |AB|$ a $|AB| = \sqrt{2}\cdot|AD|$, 2 body za použitie rovnosti $|AC|^2 + |BD|^2 = 2\cdot|AB|^2 + 2\cdot|AD|^2$ a dva body za dokončenie dôkazu.

---

4. *Číslo n je súčinom štyroch prvočísel. Ak každé z týchto prvočísel zväčšíme o 1 a vzniknuté štyri čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2 886 väčšie ako pôvodné číslo n. Určte všetky také n.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Ak označíme a, b, c, d prvočísla, ktorých súčinom je číslo n, platí rovnosť

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = abcd + 2\,886.$$

Keby boli všetky prvočísla a, b, c, d nepárne, bolo by na ľavej strane tejto rovnosti párne číslo, ale na pravej strane nepárne číslo. Preto je niektoré z prvočísel a, b, c, d, napríklad a, rovné dvom. Dosadením dostaneme

$$3(b+1)(c+1)(d+1) = 2bcd + 2\,886.$$

Keďže čísla $3(b+1)(c+1)(d+1)$ a 2 886 sú deliteľné tromi, musí byť deliteľné tromi aj $2bcd$. Preto je niektoré z čísel b, c, d, napríklad b, rovné trom. Dosadením dostaneme $12(c+1)(d+1) = 6cd + 2\,886$, po vydelení šiestimi $2(c+1)(d+1) = cd + 481$ a po ďalších úpravách $cd + 2c + 2d = 479$, $(c+2)(d+2) = 483 = 3\cdot 7\cdot 23$. Ak predpokladáme $c \leqq d$, máme vzhľadom na nerovnosť $c + 2 > 3$ dve možnosti:

1. $c + 2 = 7$, $d + 2 = 69$, odtiaľ $c = 5$, $d = 67$.
2. $c + 2 = 21$, $d + 2 = 23$, odtiaľ $c = 19$, $d = 21$, čo ale nevyhovuje, lebo 21 nie je prvočíslo.

Jediné vyhovujúce n je teda $2\cdot 3\cdot 5\cdot 67 = 2\,010$.

Poznámka. Záverečné úvahy sa dajú vykonať pomocou vyjadrenia

$$d = \frac{479 - 2c}{c+2} = \frac{483}{c+2} - 2;$$

$c + 2$ tak musí byť niektorý z deliteľov čísla 483, ktorý je väčší ako 3, teda $c + 2 \in \{7, 21, 23, 69, 161, 483\}$ a $c \in \{5, 19, 21, 67, 159, 481\}$. Keďže c aj d sú prvočísla, vyhovujú len možnosti $c = 5$, $d = 67$ alebo $c = 67$, $d = 5$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho jeden bod za zostavenie rovnosti $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = abcd + 2\,886$, dva body za dôkaz, že niektoré z prvočísel je rovné dvom, jeden bod za dôkaz, že niektoré z prvočísel je rovné trom, 1 bod za úpravu rovnice pre zvyšné dve prvočísla na tvar umožňujúci ďalšie úvahy o deliteľnosti a 1 bod za konečné nájdenie čísla n. Ak riešiteľ číslo n ako aktuálny rok iba uhádne a urobí skúšku, dajte 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.