**2008/2009**
**58. ročník MO** *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

**1.** *Isté štvorciferné prirodzené číslo je deliteľné siedmimi. Ak zapíšeme jeho číslice v opačnom poradí, dostaneme väčšie štvorciferné číslo, ktoré je tiež deliteľné siedmimi. Navyše po delení číslom 37 dávajú obe spomenuté štvorciferné čísla rovnaký zvyšok. Určte pôvodné štvorciferné číslo.* (Jaromír Šimša)

**Riešenie.** Označme hľadané číslo $n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ a číslo s opačným poradím číslic $k = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$. Obe čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 37, preto je ich rozdiel

$$\begin{aligned} k - n &= (1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) = \\ &= 999(d-a) + 90(c-b) = 37 \cdot 27(d-a) + 90(c-b) \end{aligned} \tag{1}$$

deliteľný číslom 37, čiže $37 \mid 90(c-b)$. Keďže 37 je prvočíslo a číslo 90 nie je jeho násobkom, nutne $37 \mid c - b$. To je pre číslice $b$, $c$ možné len v prípade, že $b = c$. Naopak, ak $b = c$, tak z vyjadrenia (1) je zrejmé, že rozdiel $k - n$ je deliteľný číslom 37, t. j. čísla $n$ a $k$ dávajú po delení 37 rovnaký zvyšok. Môžeme teda položiť $n = \overline{abbd}$, $k = \overline{dbba}$ a ďalej sa už zaoberať len podmienkami o deliteľnosti siedmimi.

Keďže sú siedmimi deliteľné obe čísla $n$, $k$, je siedmimi deliteľný aj ich rozdiel. Dosadením $c = b$ do vyjadrenia (1) dostávame

$$7 \mid k - n = 37 \cdot 27(d-a).$$

Rovnakou úvahou ako predtým (7 je prvočíslo a $37 \cdot 27$ nie je jeho násobkom) dostávame $7 \mid d - a$. Navyše zo zadanej podmienky $k > n$ vyplýva $d > a$; nemôže byť ani $d = a$, inak by sme mali $n = \overline{abbd} = \overline{dbba} = k$. Číslice $a$, $d$ preto musia spĺňať vzťah $d - a = 7$. Prípustné sú len dve možnosti: $a = 1$, $d = 8$, alebo $a = 2$, $d = 9$. (Prípad $a = 0$, $d = 7$ je vylúčený, lebo $a$ je začiatočnou číslicou čísla $n$.)

Ak $a = 1$, $d = 8$, budú čísla

$$\begin{aligned} n &= \overline{1bb8} = 1008 + 110b = 7 \cdot 144 + 110b, \\ k &= \overline{8bb1} = 8001 + 110b = 7 \cdot 1143 + 110b \end{aligned}$$

deliteľné siedmimi vtedy a len vtedy, keď $7 \mid b$, čiže $b = 0$ alebo $b = 7$. Teda $n = 1008$ alebo $n = 1778$.

Ak $a = 2$, $d = 9$, budú čísla

$$\begin{aligned} n &= \overline{2bb9} = 2009 + 110b = 7 \cdot 287 + 110b, \\ k &= \overline{9bb2} = 9002 + 110b = 7 \cdot 1286 + 110b \end{aligned}$$

deliteľné siedmimi vtedy a len vtedy, keď $7 \mid b$, čiže $b = 0$ alebo $b = 7$. Teda $n = 2009$ alebo $n = 2779$.

*Odpoveď.* Hľadané štvorciferné číslo je niektoré zo štvorice 1008, 1778, 2009, 2779.

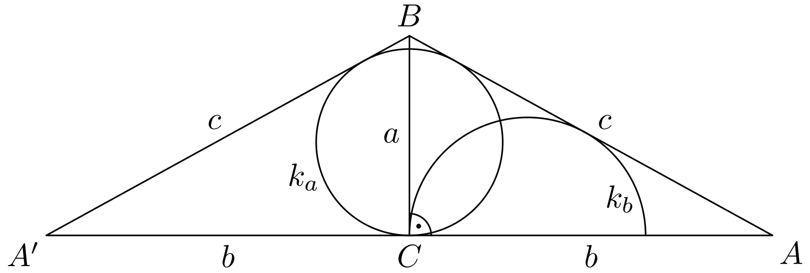
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho 2 body dajte za zdôvodnenie podmienky $b = c$, 2 body za odvodenie vzťahu $d - a = 7$ a 2 body za zdôvodnenie $7 \mid b$. Ak riešenie pozostáva z odvodenia nutných podmienok bez zmienky o tom, že sú aj postačujúce, je nutná skúška a v prípade jej opomenutia dajte len 5 bodov.

**2.** *Na odvesnách dĺžok a, b pravouhlého trojuholníka ležia postupne stredy dvoch kružníc $k_a$, $k_b$. Obe kružnice sa dotýkajú prepony a prechádzajú vrcholom oproti prepone. Polomery uvedených kružníc označme $\varrho_a$, $\varrho_b$. Určte najväčšie kladné reálne číslo p také, že nerovnosť*

$$\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}\geqq p\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big)$$

*platí pre všetky pravouhlé trojuholníky.* (Jaroslav Švrček)

**Riešenie.** Označme vrcholy daného trojuholníka $A$, $B$, $C$ tak, aby vrcholy $A$, $B$ ležali postupne oproti odvesnám dĺžok $a$, $b$.




Obr. 1

Najprv vypočítame veľkosti polomerov polkružníc $k_a$ a $k_b$. Označme $A'$ obraz bodu $A$ v osovej súmernosti podľa priamky $BC$. Kružnica $k_a$ je vpísaná do trojuholníka $ABA'$ (obr. 1). Rovnoramenný trojuholník $ABA'$ má obvod $o = 2(b+c)$ a obsah $S = ab$, preto polomer kružnice $k_a$ vypočítame podľa známeho vzťahu

$$\varrho_a=\frac{2S}{o}=\frac{ab}{b+c}.$$

Podobne vypočítame polomer kružnice $k_b$, dostaneme $\varrho_b = ab/(a + c)$.

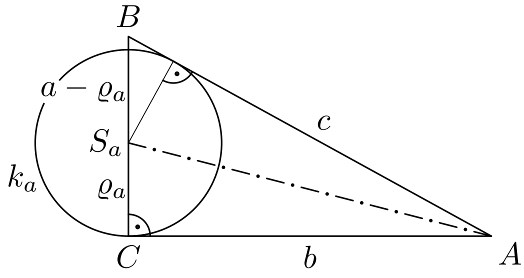
Pre $p$ a pre ľubovoľný pravouhlý trojuholník s odvesnami $a$, $b$ a preponou $c$ má platiť

$$p\leqq\frac{\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b+c}{ab}+\frac{a+c}{ab}}{\frac{a+b}{ab}}=\frac{a+b+2c}{a+b}=1+\frac{2c}{a+b}=1+\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Voľbou $a = b$ dostávame $p \leqq 1 + 2\sqrt{2a^2}/2a = 1 + \sqrt{2}$. Ukážeme, že pre $p = 1 + \sqrt{2}$ je zadaná nerovnosť vždy splnená. Naozaj, z uvedeného výpočtu a z nerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom dostávame

$$\frac{\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=1+\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}=1+\frac{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{2}}{a+b}\geqq 1+\frac{2\frac{a+b}{2}\sqrt{2}}{a+b}=1+\sqrt{2}.$$

*Odpoveď.* Najväčšie reálne číslo také, že zadaná nerovnosť platí pre všetky pravouhlé trojuholníky, je $p = 1 + \sqrt{2}$.




Obr. 2

*Poznámka.* Veľkosť polomerov $\varrho_a$ a $\varrho_b$ je možné vypočítať aj inými spôsobmi, napríklad takto: Nech $c$ je dĺžka prepony. Stredy $S_a$, $S_b$ polkružníc $k_a$, $k_b$ ležia na osiach uhlov $CAB$ a $CBA$. Je známe, že os uhla delí v trojuholníku protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. V našom prípade (obr. 2) dostávame $|S_aC|/|S_aB| = |AC|/|AB|$, t. j.

$$\frac{\varrho_a}{a-\varrho_a} = \frac{b}{c},$$

odkiaľ úpravou ľahko vyjadríme $\varrho_a = ab/(b+c)$. Analogicky vypočítame $\varrho_b$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za výpočet veľkostí polomerov $\varrho_a$ a $\varrho_b$, 1 bod za nájdenie hodnoty $p = 1+\sqrt{2}$ a 3 body za dôkaz nerovnosti zo zadania pre $p = 1+\sqrt{2}$.

---

**3.** *Určte veľkosti vnútorných uhlov $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trojuholníka, pre ktoré platí*

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha &= 1,\\ 2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) - \cos\beta &= 0. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

**Riešenie.** Podobne ako pri riešení prvej úlohy domáceho kola, využitím známych súčtových vzorcov goniometrických funkcií pre ľubovoľné reálne čísla $x$, $y$ dostávame

$$\begin{aligned} 2\sin y\sin(x+y) - \cos x &= 2\sin y(\sin x\cos y + \cos x\sin y) - \cos x =\\ &= 2\sin y\cos y\sin x + (2\sin^2 y - 1)\cos x =\\ &= \sin 2y\sin x - \cos 2y\cos x =\\ &= -\cos(x+2y). \end{aligned}$$

Z podmienok úlohy potom pre veľkosti vnútorných uhlov $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trojuholníka platí

$$\cos\alpha - 2\sin\beta\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+2\beta) = -1, \tag{1}$$
$$\cos\beta - 2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) = \cos(\beta+2\gamma) = 0. \tag{2}$$

Vnútorné uhly ľubovoľného trojuholníka ležia v intervale $(0,\pi)$, z čoho vyplývajú nerovnosti $0 < \alpha+2\beta < 3\pi$.[1] Ich spojením s (1) máme $\alpha+2\beta = \pi$. Odtiaľ

$$\gamma = \pi - (\alpha+\beta) = \pi - (\alpha+2\beta) + \beta = \pi - \pi + \beta = \beta.$$

[1] Platí dokonca $\alpha+2\beta < 2\pi$, lebo $\alpha+\beta = \pi-\gamma < \pi$.

Dosadením do (2) dostávame

$$\cos 3\beta = 0. \tag{3}$$

Uhol $\beta$ je ostrý, lebo je zhodný s uhlom $\gamma$ a trojuholník nemôže mať dva pravé, resp. dva tupé vnútorné uhly. Teda $0 < 3\beta < \frac{3}{2}\pi$, a vzhľadom na (3) máme $3\beta = \frac{1}{2}\pi$, čiže $\beta = \gamma = \frac{1}{6}\pi$. Ľahko dopočítame $\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{2}{3}\pi$. Skúškou (ktorá však pri uvedenom postupe nie je nutná) ľahko overíme, že táto trojica $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ spĺňa všetky podmienky zadania.

*Odpoveď.* Podmienkam úlohy vyhovuje trojuholník, ktorého veľkosti vnútorných uhlov (uvedené v stupňoch) sú $\alpha = 120°$, $\beta = \gamma = 30°$.

*Poznámka.* Úlohu možno riešiť aj iným postupom. Z druhej rovnice sústavy sa dá odvodiť vzťah $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = -1$, z ktorého vyplýva $\alpha - \gamma = \pm\frac{1}{2}\pi$. Pre každú z oboch možností znamienka dosadením do prvej rovnice získame kubickú rovnicu v premennej $t = \sin\gamma$, ktorú možno vyriešiť uhádnutím koreňov.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odvodenie vzťahov (1), (2) dajte 2 body, ďalšie 2 body za vzťah $\beta = \gamma$ a posledné 2 body za dopočítanie veľkostí jednotlivých uhlov. Ak žiakov postup vyžaduje urobenie skúšky, za jej vynechanie strhnite 1 bod. Po jednom bode tiež strhnite, ak je niektorá z rovností $\alpha + 2\beta = \pi$, resp. $3\beta = \frac{1}{2}\pi$ (vyplývajúca z hodnôt príslušných kosínusov) odvodená bez spomenutia potrebných nerovností $0 < \alpha + 2\beta < 3\pi$, resp. $0 < 3\beta < \frac{3}{2}\pi$.

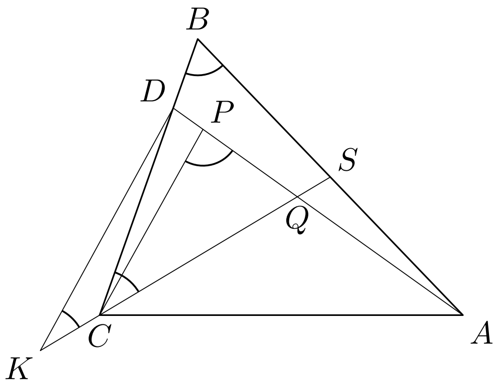
Ak žiak úlohu rieši postupom naznačeným v poznámke, za odvodenie vzťahu $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = -1$ dajte 1 bod a za odvodenie rovnosti $\alpha - \gamma = \pm\frac{1}{2}\pi$ ďalšie 2 body. Po jednom bode dajte za úspešné vyriešenie každej z dvoch kubických rovníc a posledný bod za správne dopočítanie veľkostí uhlov a urobenie skúšky.

---

**4.** *Vnútri strany $BC$ ostrouhlého trojuholníka $ABC$ zvoľme bod $D$ a na úsečke $AD$ bod $P$ tak, aby neležal na ťažnici z vrcholu $C$. Priamka tejto ťažnice pretne kružnicu opísanú trojuholníku $CPD$ v bode, ktorý označíme $K$ ($K \neq C$). Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku $AKP$ prechádza okrem bodu $A$ ďalším pevným bodom, ktorý od výberu bodov $D$ a $P$ nezávisí.* (*Tomáš Jurík*)

**Riešenie.** Označme $Q$ priesečník úsečky $AD$ a ťažnice z vrcholu $C$ (teda $Q$ je „zakázaná“ poloha bodu $P$). Sú dve možnosti, kde môže ležať bod $P$: vnútri úsečky $DQ$ alebo vnútri úsečky $QA$. Ukážeme, že v oboch prípadoch prechádza kružnica opísaná trojuholníku $AKP$ bodom $M$ súmerne združeným s bodom $C$ podľa stredu strany $AB$ (ktorého poloha samozrejme od výberu bodov $D$ a $P$ nezávisí).

Uvažujme ako prvý prípad, keď bod $P$ leží vnútri úsečky $DQ$. Dokážme najskôr, že potom bod $K$ leží vnútri úsečky $CQ$. Nech $S$ je stred strany $AB$. Bod $K$ nemôže ležať vnútri polpriamky opačnej k polpriamke $QC$, v takom prípade by totiž bod $P$ ležal vnútri trojuholníka $CKD$, t. j. body $C$, $K$, $D$, $P$ by v žiadnom prípade nemohli ležať na jednej kružnici. Zadanie triviálne vylučuje aj možnosti $K = Q$ a $K = C$. Ostáva vylúčiť možnosť, že $K$ leží vnútri polpriamky opačnej k polpriamke $CQ$ (obr. 3). Ak by



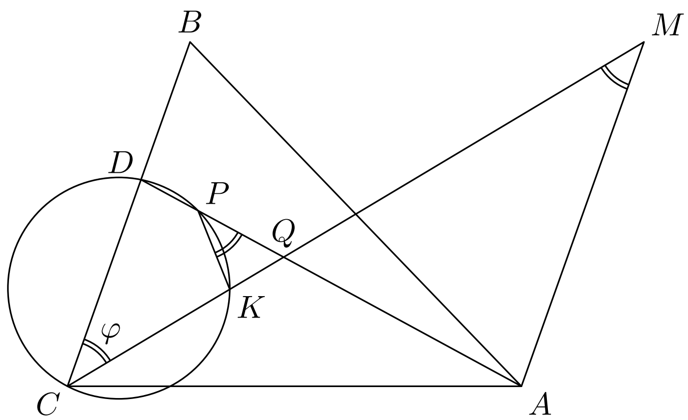

Obr. 3

to tak bolo, tak by body $K$ a $P$ ležali v opačných polrovinách určených priamkou $DC$ a uhly $DKC$ a $CPA$ by museli mať rovnakú veľkosť, aby bol štvoruholník $DKCP$ tetivový. Pri uvažovanej polohe bodov však zrejme platí

$$|\measuredangle DKC| < |\measuredangle DCS| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle CBS| = |\measuredangle CBA| < |\measuredangle CPA|.$$

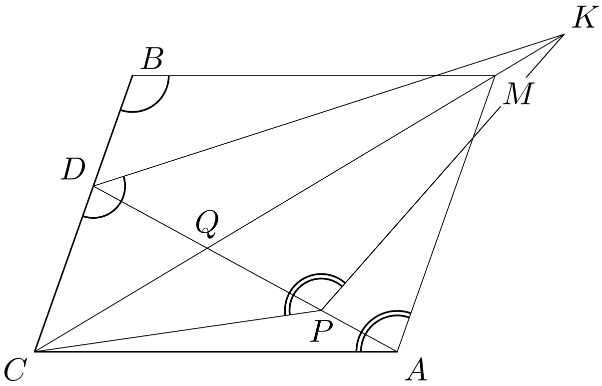
Z ostrouhlosti trojuholníka $ABC$ vyplýva $|\measuredangle DCS| < |\measuredangle CBS|$ (lebo $|CS| > |BS|$, keďže $C$ leží zvonka Tálesovej kružnice so stredom $S$ a priemerom $AB$). Spolu máme $|\measuredangle DKC| < |\measuredangle CPA|$.

Bod $K$ teda musí ležať vnútri úsečky $CQ$ (obr. 4). Označme $\varphi$ veľkosť uhla $KCB$. Body $C$ a $P$ sú protiľahlými vrcholmi tetivového štvoruholníka $CDPK$, preto $|\measuredangle DPK| = 180° - \varphi$. Z toho dostávame $|\measuredangle APK| = \varphi$. Rovnakú veľkosť ako uhol $APK$ má aj uhol $AMC$, pretože priamky $AM$ a $BC$ sú rovnobežné. Zrejme body $P$ a $M$ ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku $AK$ (oba totiž ležia v polrovine $AKQ$). Z rovnosti $|\measuredangle APK| = |\measuredangle AMK|$ potom vyplýva, že body $A$, $K$, $P$ a $M$ ležia na kružnici.




Obr. 4

V druhom prípade leží bod $P$ vnútri úsečky $QA$. Dokážme, že potom $K$ leží vnútri úsečky $QM$. Bod $K$ samozrejme musí ležať na polpriamke opačnej k polpriamke $QC$, t. j. na polpriamke $QM$. Stačí vylúčiť možnosť, že $K$ leží až „za“ bodom $M$, čiže na polpriamke opačnej k polpriamke $MQ$ (obr. 5). Ak by to tak bolo, zrejme by s využitím



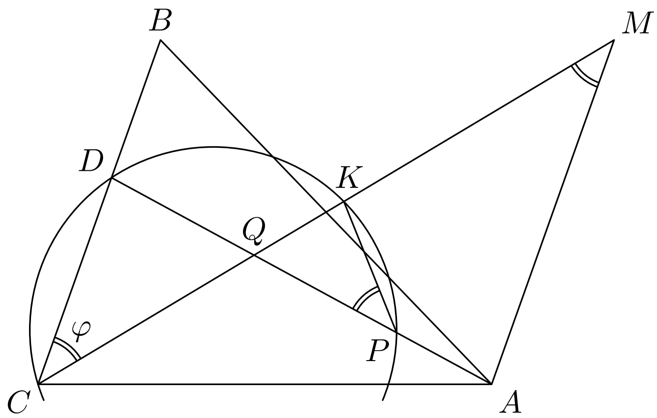

Obr. 5

ostrosti uhla $\gamma$ v trojuholníku $ABC$ platilo

$$|\measuredangle CDK| > |\measuredangle CBM| = 180^\circ - \gamma > 90^\circ \quad \text{a} \quad |\measuredangle CPK| > |\measuredangle CAM| = 180^\circ - \gamma > 90^\circ.$$

Odtiaľ $|\measuredangle CDK| + |\measuredangle CPK| > 180^\circ$, čo nie je možné vzhľadom na tetivovosť štvoruholníka $CPKD$ (súčet veľkostí protiľahlých uhlov musí byť rovný $180^\circ$).

Bod $K$ teda musí ležať vnútri úsečky $QM$ (obr. 6). Označme opäť $\varphi$ veľkosť uhla $KCB$. Uhly $DCK$ a $DPK$ sú obvodové uhly nad tetivou $DK$, čiže $|\measuredangle DPK| = \varphi$ a $|\measuredangle APK| = 180^\circ - \varphi$. Uhol $AMC$ má veľkosť $\varphi$. Priamka $AK$ oddeľuje body $Q$ a $M$, preto body $P$ a $M$ ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na túto priamku. Takže $APKM$ je tetivový štvoruholník, lebo uhly pri protiľahlých vrcholoch $P$ a $M$ majú súčet $180^\circ$.




Obr. 6

**Iné riešenie.** Dokážeme tvrdenie bez predpokladu ostrouhlosti trojuholníka $ABC$. Označme body $Q$ a $M$ rovnako ako v prvom riešení. Nevýhodou predošlého postupu je, že musíme rozoberať veľa možností a zdôvodňovať, že štvorice bodov ležia na uvažovaných kružniciach v správnom poradí (pritom pri tupouhlom trojuholníku $ABC$ môže bod $K$ ležať aj na polpriamke opačnej k polpriamke $CQ$, resp. $MQ$). Namiesto obvodových uhlov využijeme mocnosť bodu ku kružnici. Z nej pre bod $Q$ a kružnicu opísanú štvorici bodov $C$, $P$, $D$, $K$ dostávame (bez ohľadu na polohu bodu $P$) $|QK| \cdot |QC| = |QP| \cdot |QD|$, teda $|QK| : |QP| = |QD| : |QC|$. Z podobnosti trojuholníkov

$QDC$ a $QAM$, ktorá vyplýva z rovnobežnosti priamok $BC$ a $AM$, máme $|QD| : |QC| = |QA| : |QM|$. Platí teda

$$\frac{|QK|}{|QP|} = \frac{|QD|}{|QC|} = \frac{|QA|}{|QM|},$$

odkiaľ $|QK| \cdot |QM| = |QP| \cdot |QA|$. Z tejto rovnosti a zo známeho „obráteného“ tvrdenia o mocnosti bodu ku kružnici už priamo vyplýva, že body $K$, $M$, $P$, $A$ ležia na jednej kružnici, bez ohľadu na to, či bod $Q$ leží vnútri oboch úsečiek $KM$, $PA$, alebo mimo oboch týchto úsečiek. (Zrejme nie je možné, aby ležal vnútri jednej z nich a mimo druhej z nich; na dôkaz toho stačí rozlíšiť dve možné polohy bodu $P$ na úsečke $DA$ podobne ako v prvom riešení).

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za objavenie pevného bodu $M$. Ak žiak spraví dôkaz len pre jeden z prípadov uvedených v prvom riešení, udeľte 5 bodov. Ak žiak bez zdôvodnenia predpokladá správnu polohu bodov $P$ a $M$ vzhľadom na priamku $AK$, strhnite 1 bod (čiže treba dať 5 bodov za dôkaz pre oba prípady alebo 4 body, ak sa žiak zaoberá len jedným z uvedených prípadov). Pri riešení využívajúcom mocnosť bodu ku kružnici strhnite 1 bod, ak žiak nezdôvodní, že bod $Q$ leží buď vnútri oboch úsečiek $KM$, $PA$, alebo mimo oboch týchto úsečiek. Riešenia iného typu ako uvedené hodnoťte v súlade s touto schémou.

*Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.*