2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n a k väčšie ako 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ deliteľné dvanástimi.* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Vzhľadom na to, že $12 = 3 \cdot 4$, stačí ukázať, že číslo $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2-1) = (n-1)n(n+1)n^{k-1}$ je deliteľné tromi a štyrmi. Prvé tri činitele posledného výrazu sú tri po sebe idúce prirodzené čísla, takže práve jedno z nich je deliteľné tromi, a preto aj číslo a je deliteľné tromi. A je deliteľné aj štyrmi, lebo pri párnom n je v poslednom výraze druhý a štvrtý činiteľ párny, zatiaľ čo pri nepárnom n je párny prvý a tretí činiteľ. Tým je dôkaz hotový.

Iné riešenie. Položme $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2-1) = (n-1)n^k(n+1)$. Opäť ukážeme, že a je deliteľné štyrmi a tromi. Ak je n párne, je n^k deliteľné štyrmi pre každé celé $k \geqq 2$. Ak je n nepárne, sú činitele $n-1$ a $n+1$ párne čísla, takže a je deliteľné štyrmi pre každé celé $n \geqq 2$.

Deliteľnosť tromi je zrejmá pre $n = 3l$. Ak $n = 3l+1$, pričom l je celé kladné číslo, je tromi deliteľný činiteľ $n-1$ (a teda aj číslo a). Ak $n = 3l+2$ (l je celé nezáporné), je tromi deliteľný činiteľ $n+1$. Keďže iné možnosti pre zvyšok čísla n po delení tromi nie sú, je číslo a deliteľné tromi. Tým je požadovaný dôkaz ukončený.

Za úplný a správne zdôvodnený dôkaz dajte 6 bodov, z toho 1 bod za vhodný rozklad čísla a na súčin, po dvoch bodoch za dôkazy deliteľnosti tromi a štyrmi a jeden bod za správny záver.

Deliteľnosť štyrmi možno samozrejme dokázať aj rozborom možností $n = 4l$, $n = 4l+1$, $n = 4l+2$, $n = 4l+3$. Podobne pre deliteľnosť tromi možno využiť známe tvrdenie, že druhá mocnina celého čísla nikdy nedáva po delení tromi zvyšok 2.

---

2. *Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť*

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Danú nerovnosť ekvivalentne upravujme:

$$\begin{aligned}
(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2 - 2a + 1)(b^2 - 2b + 1) &\geqq 4,\\
(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2b^2 - 2ab^2 + b^2) + {}&\\
+ (2a^2b - 4ab + 2b) - (a^2 - 2a + 1) &\geqq 4,\\
2ab(a+b) - 4ab + 2(a+b) &\geqq 4,\\
2(a+b)(ab+1) &\geqq 4(ab+1),\\
2(ab+1)(a+b-2) &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Vzhľadom na predpoklad $a \geqq 1$, $b \geqq 1$ je $a + b \geqq 2$, takže upravená nerovnosť zrejme platí. Rovnosť v nej (a teda aj v zadanej) nerovnosti pritom nastane práve vtedy, keď $a + b = 2$, čiže $a = b = 1$.

Iné riešenie. Pri označení $m = a^2+1$ a $n = b^2+1$ možno ľavú stranu dokazovanej nerovnosti prepísať na tvar $L = mn - (m-2a)(n-2b) = 2an + 2bm - 2ab - 2ab$, z ktorého vynímaním dostaneme $L = 2a(n-b) + 2b(m-a)$.

Čísla a, b sú z intervalu $\langle 1, \infty)$, preto $1 = m - a^2 \leqq m - a$. Odtiaľ $2b(m - a) \geqq 2$. Analogicky dostaneme $2a(n - b) \geqq 2$. Teda $L \geqq 4$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = 1$.

Iné riešenie. Po substitúcii $a = 1 + m$ a $b = 1 + n$, pričom $m, n \geqq 0$, získá ľavá strana nerovnosti tvar

$$L = (m^2 + 2m + 2)(n^2 + 2n + 2) - m^2n^2.$$

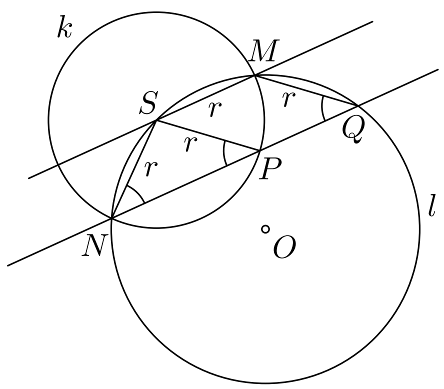
Po roznásobení, ktoré si stačí iba predstaviť, sa zruší člen m^2n^2, takže L bude súčtom nezáporných členov, medzi ktorými bude aj člen $2 \cdot 2 = 4$. Tým je nerovnosť $L \geqq 4$ dokázaná. A keďže medzi spomenutými členmi budú aj $4m$ a $4n$, z rovnosti $L = 4$ vyplýva $m = n = 0$, čo naopak rovnosť $L = 4$ tiež zrejme zaručuje. To znamená, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = 1$.

Za úplné a správne zdôvodnené riešenie dajte 6 bodov.

---

3. *Daná je kružnica k so stredom S. Kružnica l má väčší polomer ako kružnica k, prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch M a N. Priamka, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s priamkou MS, vytína na kružniciach tetivy NP a NQ. Dokážte, že trojuholník MPQ je rovnoramenný.* (*Tomáš Jurík*)

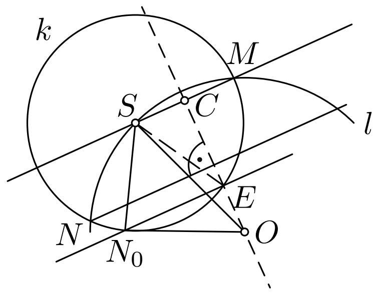
Riešenie. Polomer kružnice k označme r. Označenie vrcholov P, Q v trojuholníku MPQ nie je dôležité, preto bez ujmy na všeobecnosti označme P ten z bodov priamky vedenej bodom N rovnobežne s priamkou MS, ktorý leží na kružnici k. Bod Q potom leží na kružnici l a štvoruholník $NQMS$ je lichobežník vpísaný do kružnice l (obr. 1). Je teda rovnoramenný s ramenami MQ a NS dĺžky r. Navyše aj úsečky SP a SM majú dĺžku r. Z rovnoramenného trojuholníka NPS a rovnoramenného lichobežníka $NQMS$ vyplýva rovnosť uhlov $|\measuredangle SPN| = |\measuredangle SNP| = |\measuredangle MQP|$. Priečka PQ teda pretína priamky SP a MQ pod rovnako veľkými uhlami, a preto (podľa vety o súhlasných uhloch) sú priamky SP a MQ rovnobežné. Štvoruholník $PQMS$ je teda rovnobežník, a keďže $|SM| = |SP| = r$, je to dokonca kosoštvorec. Odtiaľ je už zrejmé, že trojuholník MPQ je rovnoramenný s ramenami PQ a MQ dĺžky r.



Obr. 1

Poznámka. Existencia tetív NP a NQ v zadaní je zaručená vďaka predpokladu, že kružnica l má väčší polomer ako kružnica k. Ak označíme C stred úsečky SM a E

ten priesečník kružnice k s osou úsečky SM, ktorý leží v polrovine SMO, bude stred O kružnice l ležať na polpriamke CE až za bodom E (obr. 2). Ďalší priesečník N oboch



Obr. 2

kružníc preto padne do pásu medzi rovnobežkami SM a N_0E v polrovine OCS, pričom N_0 je štvrtý vrchol kosoštvorca s vrcholmi S, M, E. Na to stačí ukázať, že kružnica l pretne polpriamku EN_0 až za bodom N_0, teda že jej polomer OS je väčší ako dĺžka úsečky ON_0. Toto porovnanie dvoch strán trojuholníka OSN_0 jednoducho vyplýva z porovnania jeho vnútorných uhlov: uhol pri vrchole N_0 je najväčší, lebo oba uhly pri protiľahlej strane OS sú menšie ako $60°$ (trojuholník ESN_0 je rovnostranný). Ľahko nahliadneme, že každá z rovnobežiek uvedeného pásu pretína každú z oboch kružníc v dvoch bodoch (vždy súmerne združených podľa príslušnej osi kolmej na SM).

Tým je dokázaná nielen existencia oboch tetív NP a NQ, ale aj to, že ich krajné body P a Q ležia na rovnakej strane od bodu N (ako na obr. 1), lebo oba body zrejme ležia v polrovine opačnej k spomenutej polrovine OCS.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za zdôvodnenie, že $NQMS$ je rovnoramenný lichobežník, 1 bod za dôkaz zhodnosti uhlov SNP a SPN, 2 body za dôkaz, že $PQMS$ je rovnobežník a 1 bod za zdôvodnenie $|PQ| = |MQ| = r$. Existenciu oboch tetív vyšetrovanú v záverečnej poznámke nie je nutné dokazovať, pretože je predpokladom zadania.

---

4. *Určte všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc*

$$\lfloor x + y \rfloor = 2\,010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ak a) $p = 2$, b) $p = 3$.

Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x). (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Keďže číslo p je celé, je aj $y = \lfloor x \rfloor - p$ celé číslo a $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$. Pôvodná sústava rovníc je teda ekvivalentná so sústavou

$$\lfloor x \rfloor + y = 2\,010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ktorú ľahko vyriešime napríklad sčítacou metódou. Dostaneme $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2\,010 + p)$ (čo môže platiť len pre párne p) a $y = \lfloor x \rfloor - p$.

a) Pre $p = 2$ je riešením sústavy ľubovoľné $x \in \langle 1\,006, 1\,007)$ a $y = 1\,004$.

b) Pre $p = 3$ nemá sústava žiadne riešenie.

Iné riešenie. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a + t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$.

a) Pre $p = 2$ sústavu prepíšeme na tvar $y = a - 2$ a $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2\,010$. Z poslednej rovnice vyplýva $2a - 2 = 2\,010$, odtiaľ $a = 1\,006$. Keďže $t \in \langle 0, 1)$, vyhovuje pôvodnej sústave každé $x \in \langle 1\,006, 1\,007)$, pričom $y = 1\,004$.

b) Pre $p = 3$ dostávame $y = a - 3$ a $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2\,010$. Posledná rovnica je ekvivalentná so vzťahom $2a - 3 = 2\,010$, ktorému nevyhovuje žiadne celé číslo a. Pre $p = 3$ nemá daná sústava rovníc riešenie.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za vyriešenie časti a) a 2 body za časť b).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.