**2009/2010**
**59. ročník MO** *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6*

---

**1.** *Janko s Marienkou chodia k babičke, ktorá má cukráreň a predáva perníky. Obe deti jej samozrejme pomáhajú, hlavne so zdobením. Kým babička ozdobí päť perníkov, ozdobí Marienka tri a Janko dva. Pri poslednej návšteve ozdobili všetci traja spolu päť plných tácok. Marienka s babičkou zdobili po celý čas, Janko najprv zdobil a potom zrovnával perníky po dvanásť na jednu tácku a odnášal ich do komory. Všetci traja v ten istý okamih začali i skončili.*

1. *Koľko perníkov ozdobil Janko?*
2. *Ako dlho im trvala celá práca, ak babička ozdobí jeden perník za 4 minúty?*
3. *Ako dlho pomáhal Janko zdobiť?*

(*M. Petrová*)

**Riešenie.** Najskôr zistíme, koľko perníkov ozdobili dokopy. Bolo to 5 tácok po dvanástich perníkoch, teda 60 perníkov ($5 \cdot 12 = 60$).

Keby si všetci traja v jednom okamihu vzali perník a začali ho zdobiť, tak si za uvedených podmienok všetci traja zase naraz vezmú perník až vo chvíli, keď babička ozdobí piaty, Marienka tretí a Janko druhý, skôr nie. Dokonca ani dvaja z nich si nevezmú perník v rovnakej chvíli pred uplynutím uvedenej doby. Tento časový úsek pomenujme ako jeden „cyklus“. Počet cyklov teda musí byť celé číslo (babička skončila s Marienkou v rovnakom okamihu).

Najskôr si predstavme, že Janko sa venoval iba zdobeniu a s ničím ďalším nepomáhal. Potom by za jeden cyklus všetci traja dokopy ozdobili 10 perníkov. Na ozdobenie šesťdesiatich perníkov by teda potrebovali presne 6 cyklov ($60 : 10 = 6$). Keďže ale Janko nezdobil celých 6 cyklov (zrovnával totiž perníky na tácky a tie potom odnášal), musela babička s Marienkou zdobiť aspoň 7 cyklov.

Keby pracovali 8 cyklov, babička by ozdobila 40 perníkov ($8 \cdot 5 = 40$) a Marienka by ozdobila 24 perníkov ($8 \cdot 3 = 24$). Dokopy by ozdobili 64 perníkov, teda viac ako mali. Keďže museli dokončiť cyklus (jedna by inak skončila skôr ako druhá), nemohlo byť týchto cyklov 8 alebo viac.

To znamená, že babička s Marienkou pracovali pravé 7 cyklov. Babička teda ozdobila 35 perníkov ($7 \cdot 5 = 35$) a Marienka ozdobila 21 perníkov ($7 \cdot 3 = 21$). Janko ozdobil 4 perníky ($60 - 35 - 21 = 4$).

Ak babička ozdobí jeden perník za 4 minúty, jeden cyklus trvá 20 minút ($4 \cdot 5 = 20$). Celá práca im teda trvala 140 minút ($7 \cdot 20 = 140$), t. j. 2 hodiny 20 minút.

Keďže Janko ozdobil 4 perníky, zdobil celé dva cykly ($4 : 2 = 2$), t. j. 40 minút ($2 \cdot 20 = 40$).

**Iné riešenie.** Úlohu možno riešiť aj tak, že „vynecháme“ Jankovo zdobenie. Babička s Marienkou ozdobia za jeden cyklus dokopy 8 perníkov, takže cyklov bude najviac 7 ($60 : 8 = 7$, zvyšok 4). Zvyšné 4 perníky ozdobí Janko. Keby bolo cyklov iba 6, zdobil by Janko celý čas a nemohol by odnášať tácky. Menej cyklov samozrejme byť nemohlo. Ďalej už je všetko rovnaké.

**2.** *Štvormiestny PIN kód Rasťovho mobilu je zaujímavý:*

- *jednotlivé číslice sú prvočísla,*
- *1. a 2. číslica v tomto poradí vytvorí prvočíslo,*
- *2. a 3. číslica v tomto poradí vytvorí prvočíslo,*
- *3. a 4. číslica v tomto poradí vytvorí prvočíslo.*

*Rasťo zabudol svoj PIN kód, ale pamätá si všetky vyššie uvedené vlastnosti. Snaží sa zaktivovať vypnutý mobil. Ktoré čísla by mal vyskúšať?* (M. Petrová)

**Riešenie.** Najskôr si uvedomíme, že všetky jednociferné prvočísla sú 2, 3, 5 a 7. Ďalej zistíme, že všetky dvojciferné prvočísla, ktorá možno zostaviť z týchto číslic, sú

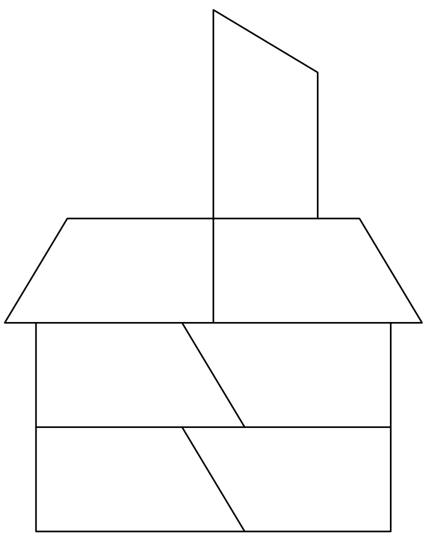
$$23,\ 37,\ 53,\ 73.$$

Keď vyjadríme Rasťov PIN ako $ABCD$, zo zadania vieme, že $AB$, $BC$ a $CD$ musia byť prvočísla. (Pozor, nikde nie je povedané, že $A$, $B$, $C$ a $D$ sú navzájom rôzne číslice!) Za $A$ postupne dosadíme číslice 2, 3, 5, 7 a budeme zisťovať, či a akými číslicami možno nahradiť $B$, $C$, $D$, aby sme vyhoveli uvedeným požiadavkám. Všetko je zhrnuté v nasledujúcej tabuľke:

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | PIN |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 7 | 3 | 2373 |
| 3 | 7 | 3 | 7 | 3737 |
| 5 | 3 | 7 | 3 | 5373 |
| 7 | 3 | 7 | 3 | 7373 |

Rasťo by mal vyskúšať nasledujúce štyri čísla: 2373, 3737, 5373 a 7373.

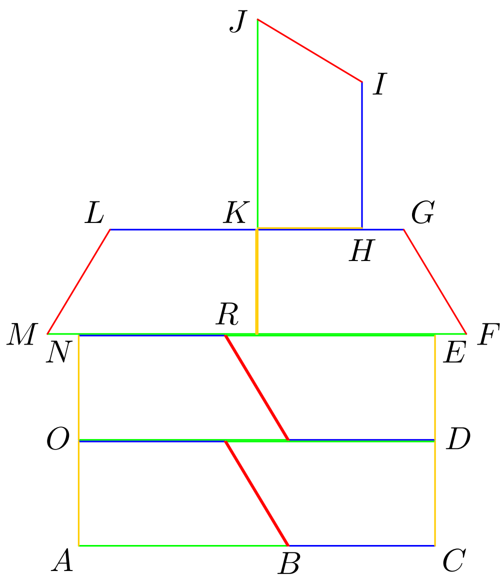
**3.** *Na obr. 1 je útvar zložený zo siedmich rovnakých štvoruholníkových dielikov stavebnice. Aký je obvod tohto útvaru, ak obvod jedného štvoruholníkového dielika je* 17 cm*?*



*Obr. 1*

(*K. Pazourek*)

**Riešenie.** Ofarbime jednotlivé strany dielikov nasledovne: najdlhšiu stranu zelenou, s ňou rovnobežnú stranu modrou, na ne kolmú stranu žltou a zvyšnú stranu červenou; dĺžky zodpovedajúcich strán budeme označovať skrátene $z$, $m$, $\check{z}$ a $\check{c}$. Ďalej označme vybrané „vrcholy“ jednotlivých dielikov ako na obr. 2.




Obr. 2

Obvod útvaru je tvorený:
- 3 modrými úsečkami $BC$, $HI$ a $KL$, ktorých dĺžky sú $m$,
- 2 zelenými úsečkami $AB$ a $JK$, ktorých dĺžky sú $z$,
- 4 žltými úsečkami $CD$, $DE$, $NO$ a $OA$, ktorých dĺžky sú $\check{z}$,
- 3 červenými úsečkami $FG$, $IJ$ a $LM$, ktorých dĺžky sú $\check{c}$,
- 2 zhodnými úsečkami $EF$ a $MN$ a 1 úsečkou $GH$, ktorých dĺžky zatiaľ nepoznáme.

Dĺžky úsečiek $MN$ a $EF$ spolu so zelenou stranou $ER$ a modrou stranou $RN$ dávajú úsečku $MF$, ktorá je tvorená dvoma zelenými stranami. Inými slovami,

$$|EF| + |MN| = z + z - (z + m) = z - m.$$

Dĺžku modrej strany $KG$ môžeme vyjadriť ako súčet dĺžok žltej strany $KH$ a úsečky $GH$, teda

$$|GH| = m - \check{z}.$$

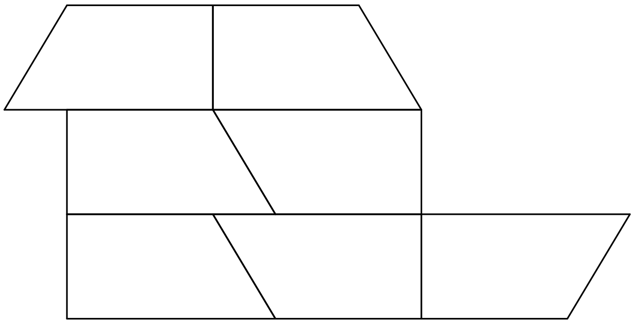
Dokopy je obvod útvaru

$$3m + 2z + 4\check{z} + 3\check{c} + (z - m) + (m - \check{z}) = 3m + 3z + 3\check{z} + 3\check{c} = 3(m + z + \check{z} + \check{c}).$$

Dostali sme tak trojnásobok obvodu jedného štvoruholníkového dielika, teda obvod celého útvaru je rovný

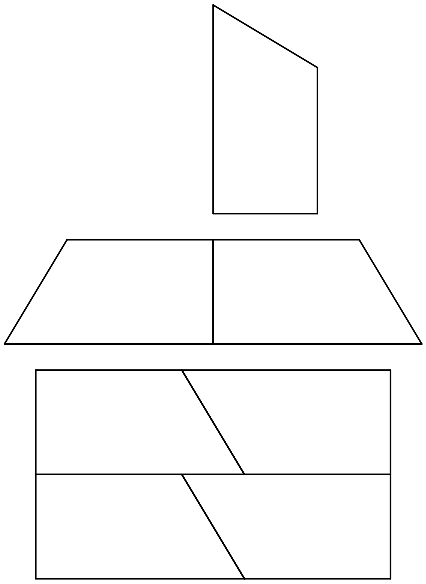
$$3 \cdot 17 = 51 \text{ (cm)}.$$

*Poznámka.* Ak najskôr posunieme niektoré časti útvaru tak, aby obvod ostal zachovaný, môžu sa niektoré úvahy zjednodušiť, viď napr. obr. 3.



Obr. 3

**Iné riešenie.** Oddeľme „komín“ od „strechy“ a „strechu“ od „stien“ tak, ako ukazuje obr. 4.



Obr. 4

Súčet obvodov týchto troch útvarov určíme ľahko (použijeme označenie $m$, $z$, $ž$, $č$ ako vyššie):

$$5m + 5z + 5ž + 3č.$$

Uvedený súčet je oproti obvodu pôvodného útvaru väčší o dve dĺžky $ž$, čo spôsobilo oddelenie „komínu“, a o dva súčty dĺžok $m + z$, čo spôsobilo oddelenie „stien“. Obvod pôvodného útvaru je teda

$$(5m + 5z + 5ž + 3č) - ž - ž - (m + z) - (m + z) = 3m + 3z + 3ž + 3č.$$

Vidíme, že pôvodný útvar má trikrát väčší obvod ako štvoruholníkový dielik, t. j. $3 \cdot 17 = 51$ (cm).

**4.** *Ocko sa rozhodol, že bude dávať svojmu synovi Mojmírovi raz za mesiac vreckové. Prvé vreckové dostal Mojmír v januári. Ocko každý mesiac vreckové zvyšoval vždy o 4 €. Keby Mojmír neutrácal, mal by po dvanástom vreckovom pred Vianocami 900 €. Koľko € dostal Mojmír v januári ako prvé vreckové?* (L. Hozová)

**Riešenie.** Označme $x$ výšku januárového vreckového v €. Vo februári Mojmír dostal $x + 4$, v marci $x + 8$, v apríli $x + 12$, $\ldots$, v decembri $x + 44$. Podľa zadania vieme, že

$$12x + (4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44) = 900.$$

Po úpravách dostávame

$$\begin{aligned} 12x + 264 &= 900, \\ 12x &= 636, \\ x &= 53. \end{aligned}$$

Mojmír dostal v januári 53 €.

---

**5.** *Doplň miesto hviezdičiek čísla tak, aby súčet výsledkov nasledujúcich dvoch príkladov bol* 5 842.

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*9* \\ -\,*2*4 \\ \hline *54* \end{array}$$

(M. Dillingerová)

**Riešenie.** Dopĺňame postupne jednotlivé číslice; niektoré možno doplniť nezávisle na ostatnom priamo v prvom príklade, niektoré v druhom. Číslice pod čiarou dopĺňame podľa informácie o súčte výsledkov oboch príkladov. Postupovať môžeme napr. nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4\mathbf{3} \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*9* \\ -\,*2*4 \\ \hline *54* \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *2\mathbf{5}7 \\ 3*43 \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*9* \\ -\,*2*4 \\ \hline *54* \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257 \\ 3*43 \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*9* \\ -\,*2*4 \\ \hline *54\mathbf{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257 \\ 3*43 \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*9\mathbf{6} \\ -\,*2*4 \\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257 \\ 3*43 \\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*96 \\ -\,*2\mathbf{5}4 \\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257\\ 3*43\\ \hline 4*00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\mathbf{7}96\\ -*254\\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257\\ 3*43\\ \hline 4\mathbf{3}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796\\ -*254\\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *257\\ 3\mathbf{0}43\\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796\\ -*254\\ \hline *542 \end{array}$$

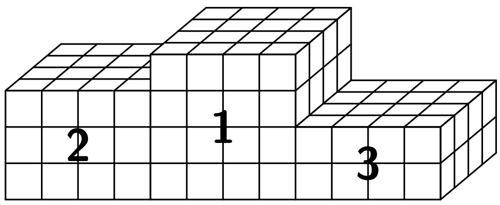
$$\begin{array}{r} \mathbf{1}257\\ 3043\\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796\\ -*254\\ \hline *542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796\\ -*254\\ \hline \mathbf{1}542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796\\ -\mathbf{1}254\\ \hline 1542 \end{array}$$

---

**6.** *Na školskú olympiádu vytvorili žiaci stupne víťazov z drevených kociek, pozri obr. 5. Koľko kociek použili celkom? Zostavené stupne natreli po celom povrchu (okrem podstavy) na bielo a po vyhlásení výsledkov svoj výtvor rozobrali. Koľko kociek malo 6, koľko 5, 4, 3, 2, 1 či žiadnu stenu bielu?* (*M. Dillingerová, M. Volfová*)




*Obr. 5*

**Riešenie.** Na druhý stupeň je celkom treba $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ kociek, na prvý $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ a na tretí $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$. Žiaci teda celkom použili

$$48 + 64 + 32 = 144$$

kociek.

Kociek, ktoré nemajú žiadnu stenu bielu, je v prvej (najspodnejšej) vrstve $10 \cdot 2 = 20$, v druhej $7 \cdot 2 = 14$, v tretej $3 \cdot 2 = 6$ a vo štvrtej vrstve žiadna; celkom teda

$$20 + 14 + 6 = 40.$$

Kociek, ktoré majú práve jednu stenu bielu, je v prednej/zadnej stene $10+7+3=$ $=20$, v bočných stenách $4+2+2=8$ (počítané zľava doprava) a v horných stenách $6+4+6=16$; celkom teda

$$20\cdot 2+8+16=64.$$

Kociek, ktoré majú práve dve steny biele, je na pozdĺžnych hranách $2\cdot(3+2+$ $+3)=16$, na priečnych $4\cdot 2=8$ a na zvislých $4+2+2=8$; celkom teda

$$16+8+8=32.$$

Kociek, ktoré majú tri steny biele, je práve 8 a žiadna kocka nemá ofarbené viac ako tri steny.

Pre kontrolu ešte porovnáme výsledky z oboch častí úlohy:

$$144=40+64+32+8.$$

*Poznámka.* Pre iný systém v riešení podobného problému poz. úlohu Z7–I–4.