2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

---

1. *Do predajne vína sa v noci dostal kocúr. Vyskočil na policu, na ktorej boli v dlhom rade vyrovnané fľaše s vínom – prvá tretina fliaš skraja stála po 8 €, nasledujúca tretina fliaš stála po 6,5 € a posledná tretina po 5 €. Najprv kocúr zhodil na zem fľašu za 8 €, ktorá stála úplne na začiatku radu, a potom postupoval ďalej a zhadzoval bez vynechania jednu fľašu za druhou. Než ho to prestalo baviť, zhodil 25 fliaš a tie sa všetky rozbili. Ráno majiteľ ľutoval, že kocúr nezačal so zhadzovaním na druhom okraji police. Aj keby totiž rozbil rovnako veľa fliaš, bola by škoda o 33 € nižšia. Koľko fliaš bolo pôvodne na polici?* (*L. Šimůnek*)

Riešenie. V zadaní nie je uvedené, v ktorej tretine radu kocúr prestal zhadzovať fľaše. Budeme postupne uvažovať o každej tretine ako o tej, kde kocúr skončil, a vždy dôjdeme k záveru, či mohol skončiť práve v nej alebo nie.

Ak prestal v prvej tretine radu, škoda by pri zhadzovaní od opačného konca bola o $25 \cdot 3 = 75$ (€) menšia, pretože rozdiel v cene najdrahšej a najlacnejšej fľaše vína je 3 €. V zadaní úlohy je rozdiel škôd iný, a síce 33 €. Kocúr teda neskončil v prvej tretine radu.

Ak zhodil viac ako jednu tretinu, avšak maximálne dve tretiny radu, rozbil všetky najdrahšie fľaše a niekoľko stredne drahých. Pri postupe z opačnej strany by zlikvidoval rovnaký počet stredne drahých a namiesto všetkých najdrahších všetky najlacnejšie. Rozdiel škôd teda zodpovedá počtu fľaší tvoriacich tretinu radu vynásobenému 3 €. Tretinu radu by teda tvorilo $33 : 3 = 11$ fľaší a fľaší celkom by bolo $3 \cdot 11 = 33$. Kocúr podľa zadania zhodil 25 fľaší, čo je viac ako dve tretiny z celkového počtu 33 fľaší. Podmienka, ktorú uvádzame na začiatku tohto odseku, nie je splnená, a kocúr teda nemohol skončiť v druhej tretine radu.

Ak zhodil viac ako dve tretiny fľaší, ostalo len niekoľko najlacnejších. Ak by zhadzoval z opačného konca, ostalo by nedotknutých rovnako veľa najdrahších fľaší. Rozdiel škôd zodpovedá počtu nedotknutých fľaší vynásobenému 3 €. Nedotknutých fľaší by teda muselo byť $33 : 3 = 11$ a fľaší celkom $11 + 25 = 36$. To by znamenalo, že kocúr zhodil všetkých 12 najdrahších fľaší ($36 : 3 = 12$), všetkých 12 stredne drahých a jednu najlacnejšiu. Také riešenie vyhovuje.

Na polici bolo pôvodne 36 fľaší.

---

2. *Na tabuli sú napísané tri prirodzené čísla a, b, c, pre ktoré platí:*

- *najväčší spoločný deliteľ čísel a, b je* 15,
- *najväčší spoločný deliteľ čísel b, c je* 6,
- *súčin čísel b, c je* 1 800,
- *najmenší spoločný násobok čísel a, b je* 3 150.

Ktoré sú to čísla? (*L. Šimůnek*)

Riešenie. Do tabuľky budeme postupne zapisovať jednotlivé prvočíselné činitele rozkladov čísel a, b, c.

Podľa prvej podmienky je najväčší spoločný deliteľ čísel a a b rovný $15 = 3 \cdot 5$. To znamená, že v riadku a aj v riadku b musia byť činitele 3 a 5 a žiadny ďalší činiteľ nemôže byť v oboch riadkoch súčasne. Po uplatnení prvej a podobnej druhej podmienky vyzerá tabuľka takto:

a	$3 \cdot 5 \cdots$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots$
c	$2 \cdot 3 \cdots$

Podľa tretej podmienky platí $b \cdot c = 1\,800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. To znamená, že v riadkoch b a c musí byť spolu týchto 7 činiteľov a žiadny navyše. Podľa štvrtej podmienky je najmenší spoločný násobok čísel a a b rovný $3\,150 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Pre riadky a a b to znamená, že:

- v jednom z nich musí byť práve raz činiteľ 2 a v druhom maximálne raz (to isté platí aj pre činiteľ 7),
- v jednom z nich musí byť práve dvakrát činiteľ 3 a v druhom maximálne dvakrát (to isté platí aj pre činiteľ 5),
- žiadny iný činiteľ tam byť nemôže.

Podľa tretej podmienky musíme do riadkov b a c doplniť už len dva činitele: 5 a 2. Činiteľ 5 nemôže byť v riadku c, pretože potom by čísla b a c mali spoločný deliteľ $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, čo je v rozpore s druhou podmienkou. Činiteľ 2 nemôže byť v riadku b, pretože to by odporovalo štvrtej podmienke o najmenšom spoločnom násobku čísel a a b. Po tejto úvahe máme riadky b a c vyplnené celé:

a	$3 \cdot 5 \cdots$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
c	$2 \cdot 2 \cdot 3$

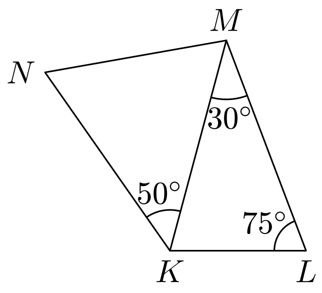
Podľa štvrtej podmienky môžu byť v riadku a iba činitele 2, 3, 5, 7. Činitele 2 a 5 tam nemôžeme doplniť, vznikol by totiž spoločný deliteľ čísel a a b odporujúci prvej podmienke. Činitele 3 a 7 do riadku a doplniť musíme kvôli štvrtej podmienke:

a	$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 315$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$
c	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Neznáme a, b, c sú postupne rovné číslam 315, 150, 12.

---

3. *V štvoruholníku $KLMN$ poznáme vyznačené uhly (obr. 1) a vieme, že platí $|KN| = |LM|$. Zisti veľkosť uhla KNM.* (L. Hozová)



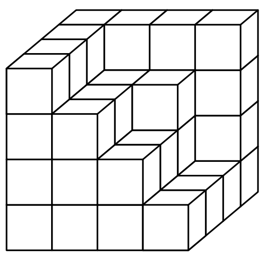
Obr. 1

Riešenie. Keďže súčet vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je 180°, veľkosť uhla LKM je $180° - 75° - 30° = 75°$. Odtiaľ vyplýva, že trojuholník KLM je rovnoramenný, t. j. $|LM| = |KM|$. Podľa zadania je $|LM| = |KN|$, čiže $|KM| = |KN|$ a trojuholník KMN je tiež rovnoramenný. Veľkosť uhla KNM je teda rovná

$$(180° - 50°) : 2 = 65°.$$

---

4. *Kocka bola zložená z 64 kocôčok s hranou dĺžky* 2 cm. *Potom bolo niekoľko kocôčok z viditeľnej strany odobraných, pozri obr. 2.*



Obr. 2

1. *Urči objem a povrch získaného telesa.*
2. *Teleso bolo na celom povrchu natreté červenou farbou, potom rozobrané na pôvodné kocôčky. Koľko z nich malo 6, koľko 5, 4, 3, 2, 1 či žiadnu stenu červenú?*

(*M. Volfová*)

Riešenie. 1. Povrch telesa je rovnaký ako povrch pôvodnej kocky, t. j.

$$6 \cdot 8 \cdot 8 = 384\ (\mathrm{cm}^2).$$

Z pôvodnej kocky bolo odobraných $3+5+9 = 17$ kocôčok (počítané po vrstvách zdola) a objem pôvodnej kocky bol $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ (cm^3). Objem získaného telesa je teda

$$512 - 17 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 512 - 136 = 376\ (\mathrm{cm}^3).$$

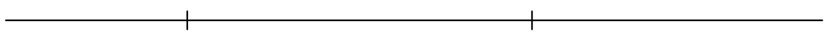
2. Žiadna z kocôčok nemá ofarbených 5 a viac stien, ostatné prípady sú diskutované v nasledujúcej tabuľke. V jednotlivých vrstvách (číslované zdola nahor) počítame

kocočky, ktoré majú 4, 3, 2, 1, resp. žiadnu stenu červenú. Odpoveď je v poslednom riadku, posledný stĺpec dopĺňame pre kontrolu:

	4	3	2	1	0	celkem
1. vrstva	1	5	6	4	0	16
2. vrstva	0	2	3	6	2	13
3. vrstva	0	3	3	5	0	11
4. vrstva	2	5	0	0	0	7
celkom	**3**	**15**	**12**	**15**	**2**	47

---

5. *Na číselnej osi (obr. 3) sú znázornené čísla* $12x$ *a* $-4x$. *Znázorni na tejto osi nulu a číslo* x. (*M. Petrová*)



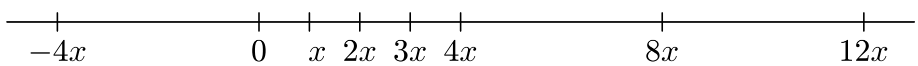
Obr. 3

Riešenie. Najskôr si treba uvedomiť, ktorému bodu prislúcha ktoré číslo. Je zrejmé, že x nemôže byť nula (vtedy by oba body splývali). Ak je x kladné, tak ľavý bod znázorňuje číslo $-4x$ a pravý bod číslo $12x$. Ak je x záporné, tak ľavý bod je obrazom čísla $12x$ a pravý bod obrazom čísla $-4x$.

a) x kladné:

Vzdialenosť čísel vyznačených na číselnej osi je $16x$. Úsečku ohraničenú vyznačenými bodmi rozdelíme na štvrtiny. Každý zo štyroch úsekov potom bude mať dĺžku $4x$. To znamená, že (zľava doprava) postupne dostaneme obrazy čísel $-4x$, 0, $4x$, $8x$, $12x$. Nule teda prislúcha druhý bod zľava z vyznačených piatich bodov.

Teraz si budeme všímať úsečku, ktorej krajné body znázorňujú čísla 0 a $4x$. Opäť ju rozdelíme na štvrtiny. Dostaneme tak postupne (zľava doprava) obrazy čísel 0, x, $2x$, $3x$, $4x$. Číslo x je znázornené druhým bodom zľava z týchto piatich bodov (obr. 4).

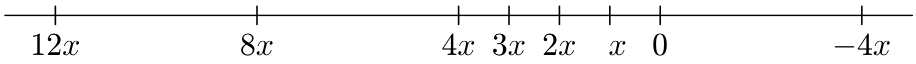


Obr. 4

b) x záporné:

Postupujeme analogicky – celá situácia je vlastne „zrkadlovým obrazom“ tej predchádzajúcej. Rozdelením zadanej úsečky na štvrtiny dostaneme (zľava doprava) obrazy čísel $12x$, $8x$, $4x$, 0, $-4x$ a nule zodpovedá štvrtý bod zľava z týchto piatich bodov.

Úsečku, ktorej krajnými bodmi sú obrazy čísel $4x$ a 0, znovu rozdelíme na štvrtiny. Dostaneme (zľava doprava) obrazy čísel $4x$, $3x$, $2x$, x, 0. Číslo x je znázornené štvrtým bodom zľava z tejto pätice bodov (obr. 5).

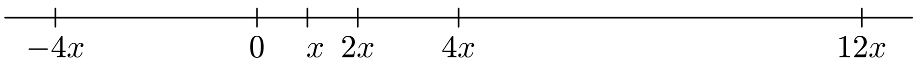


Obr. 5

Iné riešenie. Ako nulu, tak číslo x možno nájsť medzi $-4x$ a $12x$ len rozpoľovaním vhodných úsečiek na číselnej osi. Využijeme to, že aritmetickému priemeru dvoch čísel zodpovedá stred príslušnej úsečky:

- aritmetický priemer $-4x$ a $12x$ je $4x$,
- aritmetický priemer $-4x$ a $4x$ je 0,
- aritmetický priemer 0 a $4x$ je $2x$,
- aritmetický priemer 0 a $2x$ je x.

Tento postup znázorníme v prípade a) pre x kladné:



Obr. 6

---

6. *Doplň miesto hviezdičiek čísla tak, aby súčet výsledkov nasledujúcich dvoch príkladov bol* 5 842*.*

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*0* \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2*9* \\ -*254 \\ \hline *5** \end{array}$$

Úloha má viac riešení, urči aspoň dve. (*M. Dillingerová*)

Riešenie. Dopĺňame postupne jednotlivé číslice; niektoré možno doplniť nezávisle na ostatnom priamo v prvom príklade, niektoré v druhom. Číslice pod čiarou dopĺňame podľa informácie o súčte výsledkov oboch príkladov. Postupovať môžeme napr. nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*0* \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\mathbf{7}9* \\ -*254 \\ \hline *5** \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4\mathbf{3}0* \end{array} \qquad \begin{array}{r} 279* \\ -*254 \\ \hline *5** \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3\mathbf{0}4* \\ \hline 430* \end{array} \qquad \begin{array}{r} 279* \\ -*254 \\ \hline *5** \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{1}2*7 \\ 304* \\ \hline 430* \end{array} \qquad \begin{array}{r} 279* \\ -*254 \\ \hline *5** \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12*7 \\ 304* \\ \hline 430* \end{array} \qquad \begin{array}{r} 279* \\ -*254 \\ \hline \mathbf{1}5** \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 12{*}7 & 279{*} \\ 304{*} & -\mathbf{12}54 \\ \hline 430{*} & 15{*}{*} \end{array}$$

Tu už nemožno doplniť žiadnu číslicu jednoznačne. Na mieste jednotiek v ktoromkoľvek zatiaľ neznámom čísle môže byť číslica od 0 do 9 a ľubovoľná voľba na jednom takom mieste stačí na doplnenie všetkých zvyšných číslic. Úloha teda má nanajvýš desať riešení, ktoré už ľahko odhalíme. Napr. po doplnení 0 do výsledku prvého príkladu môžeme pokračovať takto:

$$\begin{array}{rr} 12{*}7 & 279{*} \\ 304\mathbf{3} & -1254 \\ \hline 4300 & 15{*}{*} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 12\mathbf{5}7 & 279{*} \\ 304\mathbf{3} & -1254 \\ \hline 4300 & 15{*}{*} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 1257 & 279{*} \\ 3043 & -1254 \\ \hline 4300 & 15{*}\mathbf{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 1257 & 279\mathbf{6} \\ 3043 & -1254 \\ \hline 4300 & 15{*}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 1257 & 2796 \\ 3043 & -1254 \\ \hline 4300 & 15\mathbf{4}2 \end{array}$$

Kontrola ($4\,300 + 1\,542 = 5\,842$) nás utvrdí v tom, že sme práve našli jedno z možných riešení. Týmto spôsobom možno nájsť všetky riešenia, ktorých je práve sedem:

$$\begin{array}{rr} 1257 & 2796 \\ 3043 & -1254 \\ \hline 4300 & 1542 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 1257 & 2795 \\ 3044 & -1254 \\ \hline 4301 & 1541 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 1257 & 2794 \\ 3045 & -1254 \\ \hline 4302 & 1540 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 1257 & 2793 \\ 3046 & -1254 \\ \hline 4303 & 1539 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
1257\\
3047\\
\hline
4304
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2792\\
-1254\\
\hline
1538
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1257\\
3048\\
\hline
4305
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2791\\
-1254\\
\hline
1537
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1257\\
3049\\
\hline
4306
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2790\\
-1254\\
\hline
1536
\end{array}
$$

Poznámka. Pri doplnení napr. 7 do výsledku prvého príkladu vedie predošlý postup k nasledujúcemu záveru:

$$
\begin{array}{r}
1267\\
3040\\
\hline
4307
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2799\\
-1254\\
\hline
1545
\end{array}
$$

Toto však nie je riešenie danej úlohy, lebo $4\,307 + 1\,545 \neq 5\,842$. Z rovnakého dôvodu nezískame ďalšie riešenie ani po doplnení 8 a 9 namiesto 7.