2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

1. *Napíšte číslo 75 ako súčet niekoľko bezprostredne po sebe idúcich prirodzených čísel. Nájdite aspoň štyri riešenia.* (*M. Volfová*)

Riešenie. Ak chceme vyjadriť 75 požadovaným spôsobom pomocou dvoch sčítancov, hľadáme prirodzené číslo x tak, aby $75 = x + (x + 1) = 2x + 1$. Jediné také číslo je $x = 37$, teda

$$75 = 37 + 38.$$

Podobne pre tri sčítance hľadáme prirodzené riešenie rovnice $75 = x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$, ktoré je $x = 24$, teda

$$75 = 24 + 25 + 26.$$

Pomocou štyroch (podobne ôsmich, dvanástich, ...) sčítancov 75 takto vyjadriť nemožno, lebo súčet akýchkoľvek štyroch (podobne ôsmich, dvanástich, ...) po sebe bezprostredne idúcich prirodzených čísel je vždy párny.

Päť sčítancov zodpovedá riešeniu rovnice $75 = x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 5x + 10$, ktoré je $x = 13$, teda

$$75 = 13 + 14 + 15 + 16 + 17.$$

Podobným spôsobom možno nájsť ešte nasledujúce riešenie pomocou šiestich, resp. desiatich sčítancov:

$$75 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15,$$
$$75 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12.$$

Poznámka. Alternatívny zápis pre tri sčítance môže vyzerať nasledovne: $75 = (y - 1) + y + (y + 1) = 3y$, odtiaľ $y = 25$, čo súhlasí s predošlým záverom. Tento spôsob zápisu je výhodný najmä pre nepárne počty sčítancov; napr. 75 nemožno zapísať požadovaným spôsobom pomocou siedmich, resp. deviatich sčítancov, pretože 75 nie je deliteľné 7, resp. 9.

2. *Tri kamarátky sa zišli na chalupe a vyrazili na huby. Našli spolu 55 hríbov. Po návrate si urobili praženicu, rozdelili ju na štyri rovnaké porcie a pozvali na ňu kamaráta Petra. Ľuba dala na praženicu šesť zo svojich hríbov, Marienka osem a Šárka päť. Každej po tom zostal rovnaký počet hríbov. Peter im daroval bonboniéru, v ktorej bolo 38 bonbónov, a povedal, že sa majú spravodlivo rozdeliť podľa toho, akým dielom prispeli na jeho jedlo.*

1. *Koľko hríbov našla každá?*
2. *Ako si mali podľa Petra bonbóny podeliť? Určte koľko bonbónov si mali jednotlivé kamarátky vziať.*

(*M. Volfová*)

Riešenie. 1. Do praženice kamarátky dali celkom $6+8+5 = 19$ hríbov, takže im zostalo $55 - 19 = 36$. Všetky potom mali rovnako, každej teda ostalo $36 : 3 = 12$ hríbov. Ľuba dala do praženice 6 hríbov, našla teda $12 + 6 = 18$ hríbov, Marienka dala 8, našla preto $12 + 8 = 20$ a Šárka dala 5, našla ich $12 + 5 = 17$.

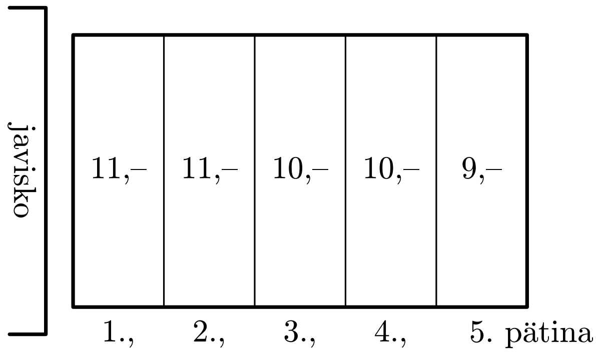
2. Každý zjedol štvrtinu praženice, t. j. každý zjedol $\frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$ hríbov. Ľuba dala do praženice 6 hríbov (sama zjedla $4\frac{3}{4}$), do Petrovej porcie teda prispela množstvom $6 - 4\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$, t. j. $\frac{5}{4}$ hríbov. Marienka dala 8 hríbov, prispela Petrovi $8 - 4\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ hríbov. Šárka dala 5 hríbov, prispela Petrovi $5 - 4\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ hríbov.

Dievčatá sa mali podľa Petra podeliť v pomere $\frac{5}{4} : \frac{13}{4} : \frac{1}{4}$. To je to isté ako pomer $5 : 13 : 1$ alebo tiež $10 : 26 : 2$, teda celkom 38 dielov, čo zodpovedá práve 38 bonbónom v bonboniére. Ľuba mala podľa Petra dostať 10 bonbónov, Marienka 26 a Šárka 2.

---

3. *Sedadlá v divadelnej sále sú rozdelené do troch kategórií podľa ich vzdialenosti od javiska. „I. miesta“ sú najbližšie k javisku, tvoria dve pätiny kapacity sály a predávajú sa za 11 €. „II. miesta“ tvoria ďalšie dve pätiny kapacity sály a predávajú sa za 10 €. Ostatné „III. miesta“ sa predávajú za 9 €. Pred zahájením predpredaja na slávnostnú premiéru bolo rozdaných 150 vstupeniek zadarmo pozvaným hosťom. Vstupenky boli rozdávané postupne od predných miest sály dozadu. Všetky ostatné vstupenky sa potom predali. Keby sa však voľné vstupenky rozdávali postupne od zadných miest dopredu, bola by tržba o 216 € väčšia. Koľko miest bolo v sále?* (L. Šimůnek)

Riešenie. Pre výpočty je podstatné, v koľkej pätine sály končí úsek s voľnými vstupenkami (poz. obr. 1). Riešenie úlohy preto rozdelíme na päť častí a v každej budeme pracovať s iným predpokladom. Pre počet sedadiel v jednej pätine sály používame neznámu p.



Obr. 1

a) Predpokladáme, že 150 voľných vstupeniek tvorilo $\frac{1}{5}$ sály alebo menej. Presunom voľných vstupeniek do zadnej časti sály by sa získalo $150 \cdot 2 = 300$ (€), čo nezodpovedá zadaniu.

b) Predpokladáme, že úsek s voľnými vstupenkami končí v druhej pätine sály, teda že $p < 150 \leqq 2p$. Presunom voľných vstupeniek z prvej pätiny do piatej by sa získalo $2p$ €. V druhej pätine sály je $150 - p$ voľných vstupeniek a ich presunom do štvrtej pätiny by sa získalo $1 \cdot (150 - p)$ €. Vypočítame p:

$$
\begin{aligned}
2p + 1 \cdot (150 - p) &= 216,\\
p + 150 &= 216,\\
p &= 66.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že predpokladaná nerovnosť $150 \leqq 2p$ neplatí, a preto úsek s voľnými vstupenkami nemôže končiť v druhej pätine sály.

c) Predpokladáme, že úsek s voľnými vstupenkami končí v tretej pätine sály, teda že $2p < 150 \leqq 3p$. Presunom voľných vstupeniek z prvej pätiny do piatej by sa získalo $2p$ €, z druhej pätiny do štvrtej p €. Zvyšných $150 - 2p$ voľných vstupeniek je v tretej pätine sály a tie by sa presunuli bez zisku opäť do tretej pätiny. Vypočítame p:

$$\begin{aligned} 2p + p + 0 \cdot (150 - 2p) &= 216, \\ 3p &= 216, \\ p &= 72. \end{aligned}$$

Vidíme, že predpokladaná nerovnosť $2p < 150 \leqq 3p$ platí. Úsek s voľnými vstupenkami teda mohol končiť v tretej pätine sály a počet miest v sále by potom bol $5p = 5 \cdot 72 = 360$.

d) Predpokladáme, že úsek s voľnými vstupenkami končí vo štvrtej pätine sály, teda že $3p < 150 \leqq 4p$. Môžeme zostaviť rovnicu podobne ako v predošlých odsekoch alebo ukázať inú úvahu: za vstupenky v piatej pätine sály sa utŕžilo $9p$ €, vstupeniek vo štvrtej pätine sa predalo $4p - 150$ a utŕžilo sa za ne $10 \cdot (4p - 150)$ €. Ak by sa voľné vstupenky rozdávali od zadných radov, predalo by sa $5p - 150$ vstupeniek a všetky by boli za 11 €. Rozdiel týchto dvoch tržieb je 216 €, dostávame rovnicu

$$\begin{aligned} 11 \cdot (5p - 150) - 9p - 10 \cdot (4p - 150) &= 216, \\ 6p - 150 &= 216, \\ p &= 61. \end{aligned}$$

Vidíme, že predpokladaná nerovnosť $3p < 150$ neplatí, a preto úsek s voľnými vstupenkami nemôže končiť vo štvrtej pätine sály.

e) Predpokladáme, že úsek s voľnými vstupenkami končil až v piatej pätine sály. Môžeme postupovať ako v odsekoch b), c) a d) alebo použiť jednoduchšiu úvahu: peniaze sa utŕžili iba za miesta v piatej pätine, predávali by sa namiesto toho v prvej pätine, získalo by sa za každú o 2 € viac. Predávaných miest by teda bolo $216 : 2 = 108$ a všetkých miest $150 + 108 = 258$. Potom by ale úsek so 150 voľnými vstupenkami nekončil v poslednej pätine sály, teda predpoklad v úvode tejto časti riešenia nemôže byť splnený.

V sále bolo 360 miest.

---

4. *Dostali sme kocku, ktorá mala dĺžku hrany vyjadrenú v centimetroch celým číslom. Všetky jej steny sme nafarbili na červeno a potom sme ju rozrezali bezo zvyšku na kocôčky s hranou dĺžky* 1 cm.

- *Lukáš tvrdí, že kocôčok s dvomi nafarbenými stenami je desaťkrát viac než tých s tromi nafarbenými stenami.*
- *Martina tvrdí, že kocôčok s dvomi nafarbenými stenami je pätnásťkrát viac než tých s tromi nafarbenými stenami.*

Pravdu má však iba jeden – kto? Koľko cm merala hrana pôvodnej kocky?

(*L. Šimůnek*)

Riešenie. Z formulácie zadania vyplýva, že hrana pôvodnej kocky merala aspoň 2 cm.

Kocôčka má tri ofarbené steny, ak jej vrchol bol pôvodne vrchol veľkej kocky. Takých kocôčok je preto rovnako veľa ako vrcholov kocky, teda 8.

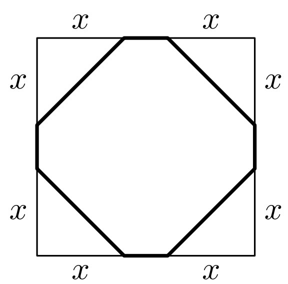
Kocôčka má práve dve ofarbené steny, ak jedna jej hrana tvorila pôvodne hranu veľkej kocky a zároveň žiadny vrchol kocôčky nebol pôvodne vrchol veľkej kocky. Keďže veľká kocka mala 12 hrán, je počet kocôčok práve s dvoma ofarbenými stenami násobkom dvanástich. Podľa Lukáša je takých kocôčok $10 \cdot 8 = 80$, čo nie je možné, pretože 80 nie je násobok dvanástich. Pravdu má Martina, ktorá tvrdí, že takých kocôčok je $15 \cdot 8 = 120$.

Na každej hrane veľkej kocky sme rozrezaním získali $120 : 12 = 10$ kocôčok s dvoma ofarbenými stenami. Hranu pôvodnej kocky však tvorili aj dve kocôčky s tromi ofarbenými stenami, dĺžka hrany teda zodpovedala dvanástim kocôčkam. Hrana pôvodnej kocky merala 12 cm.

---

5. *Zo štvorca so stranou dĺžky* 6 cm *odstrihneme od každého vrcholu zhodný rovnoramenný pravouhlý trojuholník tak, aby sa obsah štvorca zmenšil o 32%. Zistite dĺžku odvesien odstrihnutých trojuholníkov.* (M. Krejčová)

Riešenie. Obsah štvorca so stranou 6 cm je 36 cm^2. Odstrihnuté časti majú spolu obsah $0{,}32 \cdot 36 = 11{,}52\,(\mathrm{cm}^2)$. Ak odvesnu odstrihnutého trojuholníka označíme x (obr. 2), tak obsah každého takého trojuholníka je $\frac{1}{2}x^2$.



Obr. 2

Dokopy dostávame rovnicu, ktorú ľahko vyriešime:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{x^2}{2} &= 11{,}52, \\ x^2 &= 5{,}76, \\ x &= 2{,}4. \end{aligned}$$

Odvesny odstrihnutých pravouhlých trojuholníkov majú dĺžku 2,4 cm.

---

6. *V dvoch miestnostiach vzdelávacieho centra sa konali prednášky. Priemerný vek ôsmich ľudí prítomných v prvej miestnosti bol 20 rokov, priemerný vek dvanástich ľudí prítomných v druhej miestnosti bol 45 rokov. Počas prednášky odišiel jeden účastník a tým sa priemerný vek všetkých osôb v oboch miestnostiach zvýšil o jeden rok. Koľko rokov mal účastník, ktorý odišiel?* (L. Hozová)

Riešenie. Podľa zadania bol súčet vekov ôsmich osôb prítomných v prvej miestnosti rovný $8 \cdot 20 = 160$ rokov, súčet vekov dvanástich osôb prítomných v druhej miestnosti bol $12 \cdot 45 = 540$ rokov. Priemerný vek všetkých osôb v oboch miestnostiach teda bol

$$\frac{160 + 540}{8 + 12} = \frac{700}{20} = 35 \text{ rokov.}$$

Ak x je vek človeka, ktorý počas prednášky odišiel, potom vieme, že

$$\frac{700 - x}{20 - 1} = 35 + 1,$$

a rovnicu doriešime:

$$\begin{aligned} 700 - x &= 36 \cdot 19, \\ x &= 700 - 684 = 16. \end{aligned}$$

Účastník, ktorý odišiel, mal 16 rokov.