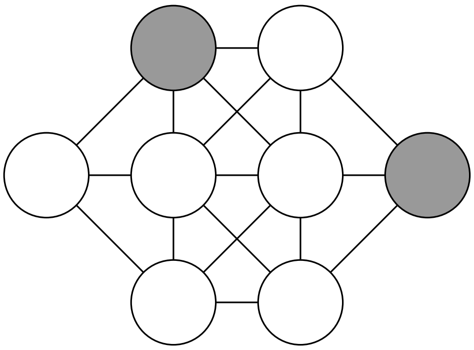
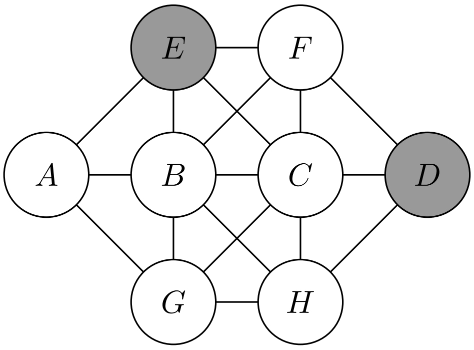
2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z6*

1. *Vpíšte do krúžkov čísla* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *a* 8 *tak, aby žiadne dve po sebe idúce čísla neboli spojené čiarou a v sivých krúžkoch boli nepárne čísla.* (S. Bednářová)



Obr. 1

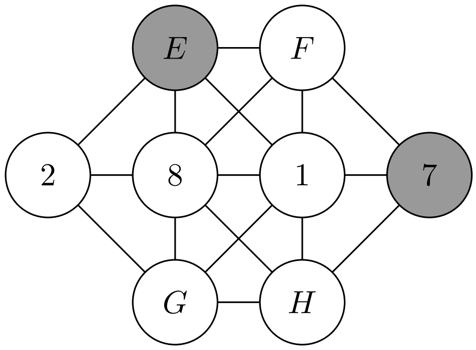
Riešenie. Krúžky, ktoré sú spojené čiarou, budeme volať *susednými.* Označme jednotlivé krúžky písmenami ako na obr. 2. Postupne do nich budeme dopĺňať čísla tak, aby boli splnené zadané pravidlá.



Obr. 2

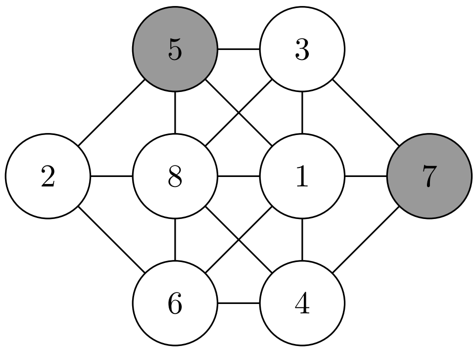
V krúžku B nemôže byť žiadne z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ak by v ňom totiž bolo napríklad číslo 2, čísla 1 a 3 by nesmeli byť v krúžku susediacom s B, museli by teda byť obe v krúžku D, čo nie je možné. Rovnako aj ku každému z čísel 3, 4, 5, 6, 7 máme dve čísla, ktoré s ním nesmú susediť. Z podobného dôvodu ani v krúžku C nemôže byť žiadne z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7. V krúžkoch B a C teda môžu byť iba čísla 1 a 8.

Ak by v krúžku B bolo číslo 1, po ňom idúce číslo 2 by muselo byť v sivom krúžku D, aby nesusedilo s 1. Tým by sa však porušilo pravidlo, že v sivých krúžkoch musia byť nepárne čísla. V krúžku B teda môže byť iba číslo 8. Číslo 7 potom musí byť v krúžku D, aby nesusedilo s 8. Pre krúžok C už máme iba jedinú možnosť – je v ňom číslo 1. Číslo 2 s ním nesmie susediť, takže musí byť v A (obr. 3).



Obr. 3

Ďalšie čísla už teraz doplníme ľahko. Číslo 6 nemôže byť v F ani v H, lebo nesmie susediť s číslom 7, a nemôže byť ani v sivom krúžku E, pretože je párne. Ostáva tak jediná možnosť: 6 je v G. Na krúžky E, F, H zvýšili čísla 3, 4, 5. Z nepárnych čísel 3, 5 musí byť v sivom E číslo 5 (lebo 3 nesmie susediť s 2), číslo 4 potom musí byť v H, aby nesusedilo s 5 a do F doplníme posledné číslo 3. Nakoniec ešte overíme, že pre takéto rozloženie (obr. 4) sú splnené všetky podmienky zadania.



Obr. 4

Návrh hodnotenia. 2 body za vysvetlenie, že krúžky B, C majú po 6 susedov, preto tam musia byť čísla 1 a 8; 2 body za správne doplnenie čísel 1, 2, 7; 2 body za doplnenie zvyšných čísel. Ak riešiteľ metódou „pokus-omyl“ (bez zdôvodnenia jednotlivých krokov) čísla správne doplní, ale neukáže, že iné riešenie neexistuje, dajte 5 bodov.

---

2. *Myslím si štvorciferné číslo, ktorého každá číslica je iná. Keď škrtnem posledné dve číslice v tomto čísle, dostanem prvočíslo. Rovnako dostanem prvočíslo aj v prípade, keď vyškrtnem z mysleného čísla druhú a štvrtú číslicu, a dokonca aj v prípade, keď z neho vyškrtnem prostredné dve číslice. Moje myslené číslo ale prvočíslo nie je – dá sa bezo zvyšku deliť tromi. Čísel, ktoré majú tieto vlastnosti, je viac. To moje je najväčšie z nich. Ktoré číslo si myslím?* (M. Petrová)

Riešenie. Hľadáme číslo v tvare $\overline{abcd}$ (číslice a, b, c, d sú rôzne). Podľa zadania je $\overline{ab}$ prvočíslo, taktiež aj $\overline{ac}$ a $\overline{ad}$. Hľadáme teda tri rôzne dvojciferné prvočísla, ktoré začínajú rovnakou číslicou (t. j. číslica na mieste desiatok je rovnaká). Vypísaním prvočísel od 10 do 99 zistíme, ktoré trojice prichádzajú do úvahy:

- 1. trojica: 13, 17, 19, číslica $a = 1$,
- 2. trojica: 41, 43, 47, číslica $a = 4$,

- 3. trojica: 71, 73, 79, číslica $a = 7$.

Pri každej trojici čísel zistíme, či sa dá z príslušných číslic vytvoriť číslo deliteľné tromi:

- 3. trojica: číslice 7, 1, 3, 9, ciferný súčet 20 – keďže nie je ciferný súčet deliteľný tromi, nie je ani číslo vytvorené z týchto číslic (v ľubovoľnom poradí) deliteľné tromi.
- 2. trojica: číslice 4, 1, 3, 7, ciferný súčet 15 – keďže je ciferný súčet deliteľný tromi, je aj číslo vytvorené z týchto číslic (v ľubovoľnom poradí) deliteľné tromi.
- 1. trojica: číslice 1, 3, 7, 9, ciferný súčet 20 – keďže nie je ciferný súčet deliteľný tromi, nie je ani číslo vytvorené z týchto číslic (v ľubovoľnom poradí) deliteľné tromi.

Vyhovujú iba prvočísla z druhej trojice. Prvá číslica hľadaného štvorciferného čísla je 4, pretože prvočísla začínajú štvorkou. Ostatné číslice zoradíme od najväčšej po najmenšiu, aby sme dostali najväčšie číslo. Hľadané číslo je 4 731.

Poznámka. Riešiteľ nemusí preverovať deliteľnosť tromi pri celej trojici naraz (t. j. kritériom deliteľnosti). Môže tiež vytvoriť všetky čísla z nájdených číslic (t. j. vymieňať číslice na mieste stoviek, desiatok a jednotiek; číslica na mieste tisícok je určená jednoznačne), zoradiť ich podľa veľkosti od najväčšieho po najmenšie a postupne skúšať, či ich možno deliť tromi bezo zvyšku.

Návrh hodnotenia. 2 body za vypísanie uvedených troch trojíc prvočísel (2 body dajte aj v prípade, keď riešiteľ začal deliteľnosť tromi pre príslušné trojice čísel ihneď overovať, a teda po nájdení trojice 41, 43, 47 už trojicu 13, 17, 19, z ktorej môže vzniknúť už iba menšie štvorciferné číslo, nehľadal); 3 body za zamietnutie trojíc 71, 73, 79 a 13, 17, 19 pre nesplnenie podmienky deliteľnosti (3 body dajte aj v prípade, keď riešiteľ po nájdení vyhovujúcej trojice 41, 43, 47 už trojicu 13, 17, 19 neskúšal); 1 bod za nájdenie správneho výsledku 4 731.

---

3. *Krabička tvaru kocky s hranou dĺžky* 4 cm *je úplne naplnená uloženými malými kockami s hranou dĺžky* 1 cm. *Vymysli všetky rôzne krabičky také, ktoré majú štvorcové dno a všetky kocky sa do každej z nich presne vojdú. Napíš ich rozmery.* (M. Krejčová)

Riešenie. V opísanej krabičke je práve 64 malých kociek, pretože pri každej hrane krabičky sú 4 malé kocky a $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Hľadáme teda všetky možné rozklady čísla 64 na súčin troch činiteľov, z ktorých dva sú rovnaké:

- $1 \cdot 1 \cdot 64$,
- $2 \cdot 2 \cdot 16$,
- $4 \cdot 4 \cdot 4$,
- $8 \cdot 8 \cdot 1$.

Okrem krabičky s rozmermi 4 cm, 4 cm, 4 cm použitej v zadaní môžeme vytvoriť ešte tri ďalšie krabičky, ktorých rozmery sú (prvé dva údaje vždy zodpovedajú dnu): 1 cm, 1 cm, 64 cm alebo 2 cm, 2 cm, 16 cm alebo 8 cm, 8 cm, 1 cm.

Návrh hodnotenia. 2 body za vypočítanie počtu kociek v zadanej krabičke; 1 bod za vysvetlenie, ktoré rozklady čísla 64 na súčin je nutné hľadať; po 1 bode za nájdenie potrebného súčinu a z neho vyplývajúcich rozmerov novej krabičky (t. j. maximálne 3 body za túto časť), súčin zodpovedajúci krabičke zo zadania a jej rozmery nechajte bez bodu.

Poznámka. Ak riešiteľ uvedie vo svojej práci iba informáciu o rozmeroch krabičky zo zadania (t. j. 4 cm, 4 cm, 4 cm) a žiadnu ďalšiu informáciu, ktorá by bola bodovo hodnotená (napr. počet všetkých kociek), nehodnoťte túto úlohu žiadnym bodom. To, či riešiteľ medzi hľadané krabičky zahrnie alebo nezahrnie aj krabičku uvedenú v zadaní, nemá vplyv na hodnotenie úlohy.

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.