

2009/2010

59. ročník MO

Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z7

1. Kremienok a Chocholúšik našli debničku s pokladom. Každý z nich si nabral do jedného vrečka strieborné mince a do druhého vrečka zlaté mince. Kremienok mal na pravom vrečku dieru a cestou polovicu zlatiek stratil. Chocholúšik mal dieru na ľavom vrečku a cestou domov stratil polovicu strieborníakov. Doma venoval Chocholúšik tretinu svojich zlatiek Kremienkovi a Kremienok štvrtinu svojich strieborníakov Chocholúšikovi. Každý potom mal presne 12 zlatiek a 18 strieborníakov. Koľko zlatiek a koľko strieborníakov si vzal každý z nich z nájdeného pokladu? (M. Dillingerová)

**Riešenie.** Keďže sa strata aj darovanie mincí týka vždy len jedného druhu mincí (buď zlatiek, alebo strieborníakov), budeme ich množstvo počítať oddelene.

Zlatky: Chocholúšikovi zostalo 12 zlatiek, čo sú  $\frac{2}{3}$  jeho pôvodného množstva. Priniesol si teda 18 zlatiek a 6 ich dal Kremienkovi. Tomu teda zostalo vo vrečku po príchode domov 6 zlatiek, čo je  $\frac{1}{2}$  jeho pôvodného množstva. Odniesol si teda 12 zlatiek.

Strieborníaky: Kremienkovi zostalo 18 strieborníakov, čo sú  $\frac{3}{4}$  jeho pôvodného množstva. Priniesol si teda 24 strieborníakov a 6 ich dal Chocholúšikovi. Tomu teda zostalo vo vrečku po príchode domov 12 strieborníakov, čo je  $\frac{1}{2}$  jeho pôvodného množstva. Odniesol si teda 24 strieborníakov.

Kremienok si vzal z pokladu 12 zlatiek a 24 strieborníakov, Chocholúšik 18 zlatiek a 24 strieborníakov.

*Návrh hodnotenia.* Za výpočet množstva mincí prvého druhu každej z postáv dajte 2 body, t. j. dokopy 4 body; za analogický výpočet množstva mincí druhého druhu každého škriatka dajte 1 bod, t. j. dokopy 2 body.

2. Na tabuli sú napísané tri prirodzené čísla  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Určí ktoré, ak vieš, že súčasne platí:

- $x$  je z nich najväčšie,
- najmenší spoločný násobok čísel  $x$  a  $y$  je 200,
- najmenší spoločný násobok čísel  $y$  a  $z$  je 300,
- najmenší spoločný násobok čísel  $x$  a  $z$  je 120. (L. Šimůnek)

**Riešenie.** Zadané hodnoty najmenších spoločných násobkov rozložíme na súčin prvočísel:

- $n(x, y) = 200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ ,
- $n(y, z) = 300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ ,
- $n(x, z) = 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ .

Do tabuľky budeme postupne zapisovať prvočíselné činitele rozkladov čísel  $x$ ,  $y$  a  $z$ , pričom budeme dodržiavať tieto zásady:

- Prvočíslo, ktoré nie je v rozklade najmenšieho spoločného násobku dvoch neznámych, nemôže byť ani v rozkladoch týchto neznámych.
- Koľkokrát je určité prvočíslo v rozklade najmenšieho spoločného násobku dvoch neznámych, toľkokrát musí byť v rozklade jednej z týchto neznámych a maximálne toľkokrát môže byť v rozklade druhej neznámej.

Keďže prvočíslo 2 je v rozklade  $n(x, y)$  trikrát, musí byť v riadku  $x$  alebo v riadku  $y$  trikrát. V rozklade  $n(y, z)$  je však prvočíslo 2 len dvakrát, takže v riadku  $y$  byť trikrát

nemôže. Prvočíslo 2 je teda trikrát v riadku  $x$ . Podobne posúdime aj výskyt dvoch prvočísel 5 v rozklade  $n(x, y)$  a jedného prvočísla 5 v rozklade  $n(x, z)$ , a tiež výskyt prvočísla 3 v rozklade  $n(y, z)$  a jeho absenciu v rozklade  $n(x, y)$ . Tabuľka potom vyzerá takto:

$x$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \dots$
$y$	$5 \cdot 5 \dots$
$z$	$3 \dots$

Ak aj naďalej budeme zo zadania brať do úvahy iba podmienky o najmenších spoločných násobkoch, nedoplníme do tabuľky už žiadne prvočíslo jednoznačne. Všimnime si preto podmienku, že  $x$  je z neznámych najväčšie. V riadku  $x$  máme zatiaľ menšiu hodnotu ako v riadku  $y$ , do riadku  $x$  teda musíme ešte nejaký činiteľ doplniť. Prvočíslo 2 je tam už obsiahnuté v maximálnom počte, prvočíslo 3 doplniť nemôžeme, pretože nie je v rozklade  $n(x, y)$ . Doplniť možno už len prvočíslo 5, avšak iba raz, lebo v rozklade  $n(x, z)$  je jedenkrát. Zistili sme teda hodnotu prvej neznámej:

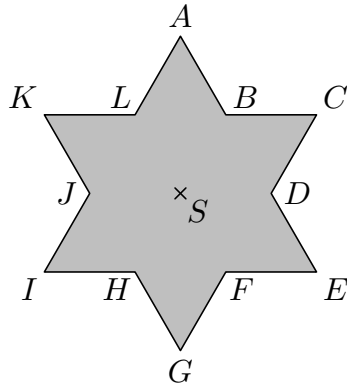
$x$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$
$y$	$5 \cdot 5 \dots$
$z$	$3 \dots$

Do riadku  $y$  sa nedá dopísať už žiadny činiteľ,  $y$  by inak bolo väčšie ako  $x$ . Takže  $y = 25$ . Do riadku  $z$  teda musíme kvôli rozkladu  $n(y, z)$  doplniť dve prvočísla 2. Hodnota v tomto riadku tak bude 12 a nebudeme môcť doplniť už žiadne prvočíslo 5, lebo potom by hodnota v tomto riadku bola väčšia ako v riadku  $x$ . Úloha má teda jediné riešenie, ktoré uvádza nasledujúca tabuľka:

$x$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$
$y$	$5 \cdot 5 = 25$
$z$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

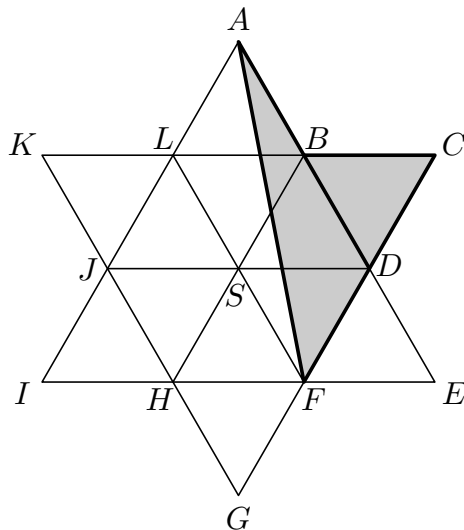
*Návrh hodnotenia.* 2 body za zistenie, že  $x$  je deliteľné ôsmimi,  $y$  dvadsiatimi piatimi a  $z$  tromi; 2 body za konečné výsledky; ďalšie 2 body podľa kvality zdôvodnenia.

**3.** Pravidelná šesťcípa hviezda  $ABCDEFGHIJKL$  so stredom  $S$ , znázornená na obr. 1, vznikla zjednotením dvoch rovnostranných trojuholníkov, z ktorých každý mal obsah  $72 \text{ cm}^2$ . Vypočítaj obsah štvoruholníka  $ABCF$ . (S. Bednářová)



Obr. 1

**Riešenie.** Hviezda je súmerná podľa šiestich osí súmernosti, súmerný podľa tých istých osí musí byť aj šesťuholník  $BDFHJL$ . Z toho vyplýva, že má všetky strany rovnako dlhé, všetky vnútorné uhly rovnako veľké, a že je tým pádom pravidelný. Do obr. 2 ešte doplníme úsečky  $LS$ ,  $BS$ ,  $DS$ ,  $FS$ ,  $HS$  a  $JS$ , ktoré tento pravidelný šesťuholník rozdeľujú na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov.



Obr. 2

Trojuholníky  $LAB$ ,  $BCD$ ,  $DEF$ ,  $FGH$ ,  $HIJ$  a  $JKL$  sú rovnostranné, pretože všetky ich vnútorné uhly majú evidentne veľkosť  $60^\circ$ . S vyššie spomenutými trojuholníkmi majú vždy spoločnú jednu stranu. Vidíme teda, že sme hviezdu rozdelili celkom na dvanásť zhodných trojuholníkov.

Vypočítame obsah jedného z týchto malých trojuholníkov. Vieme, že každý z pôvodných rovnostranných trojuholníkov (t.j.  $AEI$  a  $CGK$ ) má obsah  $72 \text{ cm}^2$ . Ďalej vieme, že je každý zložený z deviatich malých trojuholníkov. Jeden malý trojuholník má preto obsah  $72 : 9 = 8 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

Štvoruholník  $ABCF$  sa dá úsečkou  $BD$  rozdeliť na jeden taký malý trojuholník  $BCD$  a trojuholník  $ADF$ , ktorý je presnou polovicou rovnobežníka  $ADFL$  tvoreného štyrmi malými trojuholníkmi (a má teda obsah rovný obsahu dvoch malých trojuhol-

níkov). Spolu dostávame, že obsah štvoruholníka  $ABCF$  je rovný obsahu troch malých trojuholníkov, čiže  $3 \cdot 8 = 24$  (cm<sup>2</sup>).

*Návrh hodnotenia.* 2 body za zdôvodnené rozdelenie hviezdy na 12 zhodných rovnostranných trojuholníkov alebo analogický poznatok; 2 body za obsah 8 cm<sup>2</sup> jedného malého trojuholníka; 2 body za odvodenie obsahu štvoruholníka  $ABCF$ .

*Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.*

*Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.*