2008/2009
58. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

1. *Dokážte, že ak sú všetky čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, tak číslo $6p+11$ je zložené.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Predpokladajme, že všetky čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ sú prvočíslami. Skúmajme, aký zvyšok po delení piatimi môže dávať p, teda pre aké l z množiny $\{0,1,2,3,4\}$ a nezáporné celé číslo k môže platiť $p = 5k + l$.

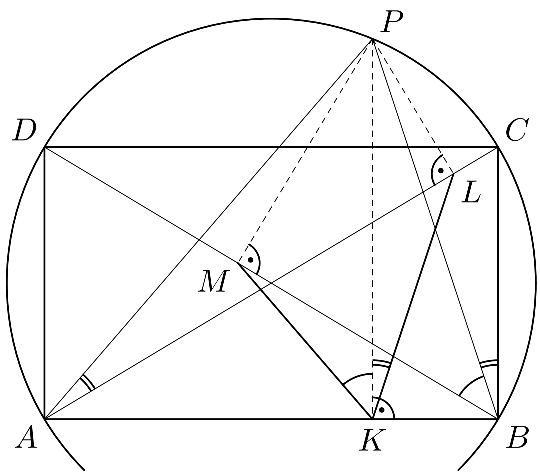
- ▷ Ak $p = 5k$, tak $11p + 10 = 5(11k + 2)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.
- ▷ Ak $p = 5k + 1$, tak $3p + 2 = 5(3k + 1)$ je prvočíslom jedine pre $k = 0$, ale potom $p = 1$, čo nie je prvočíslo.
- ▷ Ak $p = 5k + 2$, tak $7p + 6 = 5(7k + 4)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.
- ▷ Ak $p = 5k + 3$, tak $9p + 8 = 5(9k + 7)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.

Číslo p preto musí byť tvaru $5k + 4$. Potom $6p + 11 = 5(6k + 7)$, čo je zložené číslo pre každé nezáporné celé k.

Poznámka. Najmenšie p, pre ktoré sú p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočíslami, je $p = 2\,099$.

2. *Na kratšom z oblúkov CD kružnice opísanej pravouholníku $ABCD$ zvoľme bod P. Päty kolmíc z bodu P na priamky AB, AC a BD označme postupne K, L a M. Ukážte, že uhol LKM má veľkosť $45°$ práve vtedy, keď $ABCD$ je štvorec.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Ukážeme, že uhol LKM má rovnakú veľkosť ako uhol CBD. Odtiaľ zadané tvrdenie triviálne vyplýva (uhol CBD má veľkosť $45°$ práve vtedy, keď $|BC| = |CD|$, čiže keď $ABCD$ je štvorec).



Obr. 1

Body B, K, M, P ležia v tomto poradí na Tálesovej kružnici nad priemerom BP. Pre veľkosti obvodových uhlov nad tetivou PM teda platí $|\measuredangle PKM| = |\measuredangle PBM|$. Podobne body A, K, L, P ležia v tomto poradí na Tálesovej kružnici nad priemerom AP a pre veľkosti obvodových uhlov nad tetivou PL máme $|\measuredangle LKP| = |\measuredangle LAP|$. Napokon, z obvodových uhlov nad tetivou CP kružnice opísanej pravouholníku $ABCD$ dostávame $|\measuredangle CAP| = |\measuredangle CBP|$.

Z uvedených rovností vyplýva (obr. 1)

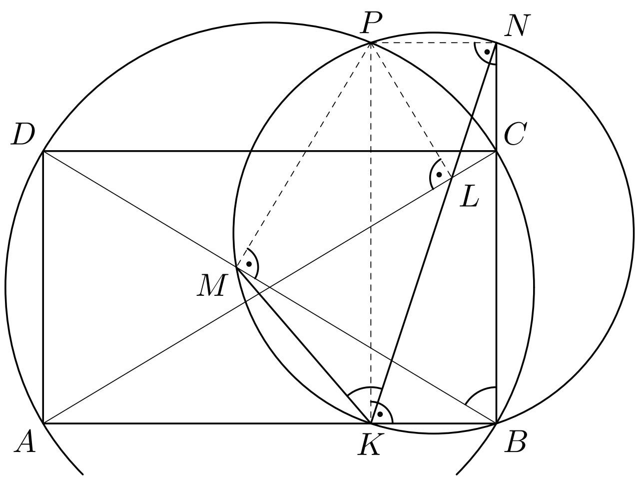
$$|\measuredangle LKM| = |\measuredangle LKP| + |\measuredangle PKM| = |\measuredangle LAP| + |\measuredangle PBM| = |\measuredangle CAP| + |\measuredangle PBD| = \\ = |\measuredangle CBP| + |\measuredangle PBD| = |\measuredangle CBD|,$$

čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Uvedený postup možno použiť aj v triviálnom prípade, keď $P = C$ alebo $P = D$; vtedy majú niektoré z uvažovaných uhlov nulovú veľkosť.

Iné riešenie. Opäť dokážeme, že uhly LKM a CBD majú rovnakú veľkosť. Označme N pätu kolmice z bodu P na priamku BC. Body K, L, N ležia na Simsonovej priamke prislúchajúcej bodu P a trojuholníku ABC (obr. 2). Na Tálesovej kružnici nad priemerom PB ležia body K, M aj N. Z obvodových uhlov nad tetivou MN teda máme

$$|\measuredangle LKM| = |\measuredangle NKM| = |\measuredangle NBM| = |\measuredangle CBD|.$$



Obr. 2

---

3. *Nájdite najmenšie kladné číslo x, pre ktoré platí: Ak a, b, c, d sú ľubovoľné kladné čísla, ktorých súčin je 1, potom*

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Nech a, b, c, d sú ľubovoľné kladné čísla, ktorých súčin je 1. Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice čísel a^x, b^x, c^x máme

$$\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \geqq \sqrt[3]{a^x b^x c^x} = \sqrt[3]{\frac{1}{d^x}}.$$

Zvolením $x = 3$ v predošlej nerovnosti dostávame $\frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) \geqq 1/d$. Zrejme rovnako platí

$$\tfrac{1}{3}(a^3 + b^3 + d^3) \geqq 1/c, \quad \tfrac{1}{3}(a^3 + c^3 + d^3) \geqq 1/b, \quad \tfrac{1}{3}(b^3 + c^3 + d^3) \geqq 1/a.$$

Sčítaním uvedených štyroch nerovností dostávame

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

teda pre $x = 3$ zadaná nerovnosť vždy platí.

Ukážeme, že $x = 3$ je hľadanou najmenšou hodnotou, teda že pre ľubovoľné $x < 3$ zadaná nerovnosť nie je vždy splnená. Hľadajme štvoricu, pre ktorú nerovnosť nebude platiť, v tvare $a = b = c = t$, $d = 1/t^3$ pre vhodné t (závislé na danom $x < 3$). Pre takéto a, b, c, d vždy platí $abcd = 1$, a tiež

$$a^x + b^x + c^x + d^x = 3t^x + \frac{1}{t^{3x}},$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{t} + t^3 > t^3.$$

Ak $t > 1$, tak $1/t^{3x} < t^x$ a ľavá strana zadanej nerovnosti je menšia ako $4t^x$. Aby nerovnosť neplatila, stačí zvoliť $t > 1$ tak, aby platilo $t^3 > 4t^x$, čo je pre $x < 3$ ekvivalentné s podmienkou

$$t > \sqrt[3-x]{4}.$$

Tú vieme voľbou dostatočne veľkého t triviálne splniť.

Záver. Hľadané najmenšie kladné číslo je $x = 3$.

---

4. *Skúmajme, pre ktoré prirodzené čísla n existujú práve štyri prirodzené čísla k také, že číslo $n + k$ je deliteľom čísla $n + k^2$.*

a) Ukážte, že vyhovuje $n = 58$ a nájdite príslušné štyri k.

b) Dokážte, že párne $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, vyhovuje práve vtedy, keď p aj $2p + 1$ sú prvočísla.

(Nulu medzi prirodzené čísla nepočítame.) (Jaromír Šimša)

Riešenie. Z rovnosti $n + k^2 = (k + n)(k - n) + n(n + 1)$ vidíme, že $n + k \mid n + k^2$ práve vtedy, keď $n + k \mid n(n + 1)$. Počet čísel k s touto vlastnosťou je teda rovný počtu tých deliteľov čísla $D = n(n + 1)$, ktoré sú väčšie ako n.

a) V prípade $n = 58$ z rozkladu na prvočinitele príslušného $D = 58 \cdot 59 = 2 \cdot 29 \cdot 59$ vidíme, že delitele čísla D väčšie ako 58 sú práve štyri: 59, $2 \cdot 59 = 118$, $29 \cdot 59 = 1\,711$ a $2 \cdot 29 \cdot 59 = 3\,422$. To sú hodnoty $58 + k$, takže príslušné k sú o 58 menšie, teda postupne $k = 1$, $k = 60$, $k = 1\,653$ a $k = 3\,364 = 58^2$.

b) Pre párne $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, platí $D = 2p(2p + 1)$, takže ľahko vypíšeme štyri delitele čísla D, ktoré sú väčšie ako dané $n = 2p$:

$$2p + 1 < 2(2p + 1) < p(2p + 1) < 2p(2p + 1). \tag{1}$$

Ak sú p, $2p + 1$ prvočísla, žiadne iné také delitele číslo D zrejme nemá, teda $n = 2p$ spĺňa vlastnosť zo zadania.

Dokážeme, že ak aspoň jedno z čísel p, $2p + 1$ je zložené, tak D má okrem deliteľov vypísaných v (1) ešte aspoň jedného deliteľa väčšieho ako $2p$.

Ak je číslo $p \geqq 3$ zložené, je deliteľné niektorým q, $2 \leqq q \leqq \frac{1}{2}p$ a číslo D má deliteľa $2q(2p+1)$, ktorý s výnimkou prípadu $q = \frac{1}{2}p$ leží medzi druhým a tretím deliteľom vypísaným v (1):

$$2(2p+1) < 2q(2p+1) < p(2p+1).$$

Ak číslo p nemá iného netriviálneho deliteľa okrem $q = \frac{1}{2}p$, platí $p = 4$. Vtedy však ani číslo $2p+1 = 9$ nie je prvočíslo, takže piateho deliteľa nájdeme podľa nasledujúceho odseku.

Ak (nepárne) číslo $2p+1$ je zložené, tak je deliteľné niektorým q, $3 \leqq q < p$, a číslo D má deliteľa $2pq$, ktorý leží medzi druhým a tretím deliteľom vypísaným v (1):

$$2(2p+1) < 2pq < p(2p+1), \quad \text{lebo} \quad q > 2 + \frac{1}{p} \text{ a } q < p + \frac{1}{2}.$$

Ekvivalencia z časti b) je tak dokázaná.

---

5. *V každom z vrcholov pravidelného n-uholníka $A_1A_2\ldots A_n$ leží určitý počet mincí: vo vrchole A_k je to práve k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vyberieme dve mince a preložíme každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte takých preložení dosiahnuť, že pre ľubovoľné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude vo vrchole A_k ležať $n+1-k$ mincí.*

(*Radek Horenský*)

Riešenie. Označme každú mincu číslom vrcholu, na ktorom leží (teda číslom z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$) a po každom preložení dvojice mincí označenie upravme. Sledujme, ako sa zmení súčet S všetkých čísel priradených minciam po jednom preložení.

Ak neprekladáme mince medzi vrcholmi A_1 a A_n, súčet sa nezmení, lebo na jednej minci sa číslo zmenší a na druhej zväčší o 1. Rovnako sa súčet nezmení, ak preložíme jednu mincu z A_1 do A_n a druhú z A_n do A_1. Ak preložíme jednu mincu z A_1 do A_n a druhú z A_i do A_{i+1} (kde $1 \leqq i \leqq n-1$), súčet S stúpne o $(n-1)+1 = n$. Ak naopak preložíme jednu mincu z A_n do A_1 a druhú z A_{i+1} do A_i (kde $1 \leqq i \leqq n-1$), súčet S klesne o n. Z uvedeného vyplýva, že zvyšok súčtu S po delení číslom n sa nikdy nezmení.

V počiatočnej pozícii má súčet S hodnotu

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + n \cdot n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

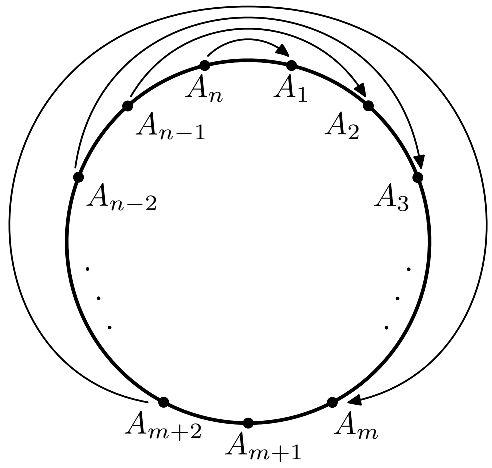
v želanej konečnej pozícii má S hodnotu

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \\ = \frac{1}{2}n(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

(využili sme známe vzorce pre súčet prvých a druhých mocnín čísel od 1 po n). Aby bolo možné presunúť mince z počiatočnej do želanej konečnej pozície, musia uvedené dve hodnoty dávať rovnaký zvyšok po delení n. To je možné len vtedy, keď ich rozdiel

$\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ je deliteľný n, čiže keď číslo $\frac{1}{6}(n+1)(n-1) = \frac{1}{6}(n^2-1)$ je celé. Dosadením jednotlivých zvyškových tried modulo 6 ľahko overíme, že táto podmienka je splnená práve vtedy, keď n dáva po delení šiestimi zvyšok 1 alebo 5.

Ostáva ukázať, že pre takéto n vieme mince poprekladať požadovaným spôsobom. Popíšeme jeden z možných postupov. Mincu, ktorá je na začiatku vo vrchole A_1, nazvime M. Všetky mince budeme prekladať v rovnakom smere, jedine mincu M (ktorú preložíme v každom kroku bez toho, aby by sme to v nasledujúcom odseku pripomínali) budeme prekladať opačným smerom a dodržiavať tak zadané pravidlá prekladania.



Obr. 3

Označme $n = 2m+1$ (zrejme uvažované hodnoty n sú nepárne). Mince budeme prekladať tak, ako je znázornené na obr. 3. Najprv preložíme $n-1$ mincí z vrcholu A_n na vrchol A_1 (posun o 1), potom $n-3$ mincí z vrcholu A_{n-1} na vrchol A_2 (posun o 3), atď., až napokon preložíme 2 mince z vrcholu A_{m+2} na vrchol A_m (posun o $n-2$). Tým dosiahneme, nepočítajúc mincu M, že v každom vrchole bude požadovaný počet mincí, len vo vrchole A_1 bude $n-1$ mincí. Vypočítajme, kde sa po uvedených preloženiach nachádza minca M.

Celkový počet preložení bol

$$T = (n-1)\cdot 1 + (n-3)\cdot 3 + \cdots + 2\cdot(n-2) = \sum_{k=1}^{m} k(n-k) =$$
$$= (2m+1)\sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{2}m(m+1)(2m+1) - \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) =$$
$$= \frac{1}{3}m(m+1)(2m+1) = \frac{1}{3}m(m+1)n.$$

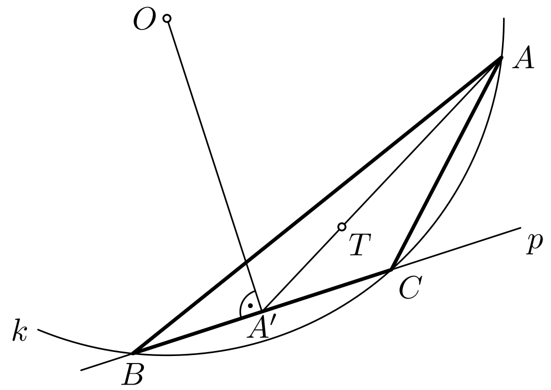
Pritom $m(m+1) = \frac{1}{4}(n+1)(n-1)$ je číslo deliteľné tromi, lebo n nie je násobkom troch. Takže T je celočíselným násobkom n a minca M sa po príslušnom počte okruhov ocitla opäť vo vrchole A_1. V ňom je preto tiež požadovaný počet n mincí.

Odpoveď. Požadovaný stav je možné dosiahnuť práve vtedy, keď n dáva po delení šiestimi zvyšok 1 alebo 5.

6. *V rovine ω sú dané dva rôzne body O a T. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov, ktoré ležia v rovine ω a majú ťažisko v bode T a stred opísanej kružnice v bode O.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Vezmime nejaký bod A z roviny ω. Aby mohol byť vrcholom trojuholníka opísaného v zadaní, musí byť rôzny od bodov O a T. Popíšeme všeobecnú konštrukciu trojuholníka ABC, v ktorom máme daný vrchol A, stred opísanej kružnice O a ťažisko T (pre trojicu navzájom rôznych bodov A, O, T). Potom zistíme, pre ktoré body A takýto trojuholník nie je možné skonštruovať.

Nech A' je stred strany BC. Bod A' je obrazom bodu A v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom $-\frac{1}{2}$. Ak $A' \neq O$, body B a C ležia na kolmici p na priamku OA' vedenej bodom A' a zároveň na opísanej kružnici k so stredom O a polomerom OA (obr. 4).

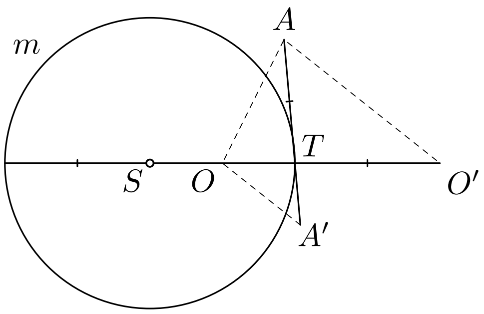


Obr. 4

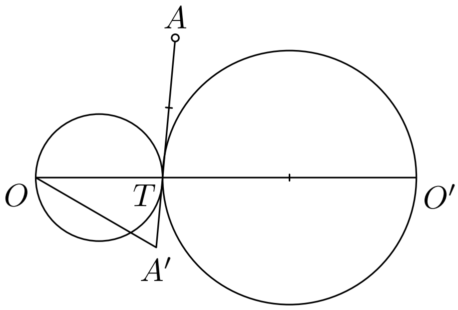
K danému bodu A vieme vždy zostrojiť bod A' ako jeho obraz v uvedenej rovnoľahlosti. Predpokladajme najprv, že $A' \neq O$. Aby sme dostali dva rôzne body B a C, musí byť priamka p sečnicou kružnice k. To nastáva práve vtedy, keď $|OA'| < |OA|$. Označme O' obraz bodu O v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2. Platí $|O'A| = 2|OA'|$, preto konštrukčnú podmienku môžeme zapísať v tvare $|O'A| < 2|OA|$. Takže bod A musí ležať mimo kruhu určeného Apollóniovou kružnicou[1] $m(S; |ST|)$, kde S je bod súmerne združený s bodom T podľa bodu O (obr. 5).

Ak teda $A' \neq O$, čiže $A \neq O'$, dostaneme konštrukciou tri body A, B, C. Tie budú vrcholmi vyhovujúceho trojuholníka, ak neležia na priamke. Na priamke ležia, keď je priamka BC totožná s priamkou AT, t. j. keď priamka OA' je kolmá na AT. Bod A' preto nesmie ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom OT a (po „zobrazení“ tejto podmienky v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2) bod A nesmie ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom $O'T$ (obr. 6).

[1] Pre dané dva rôzne body P, Q a kladné číslo $k \neq 1$ je Apollóniova kružnica množina bodov X, pre ktoré platí $|PX| = k|QX|$. Stred Apollóniovej kružnice leží na priamke PQ, rovnako ako dva body kružnice, ktoré vieme pre dané k jednoducho zostrojiť.

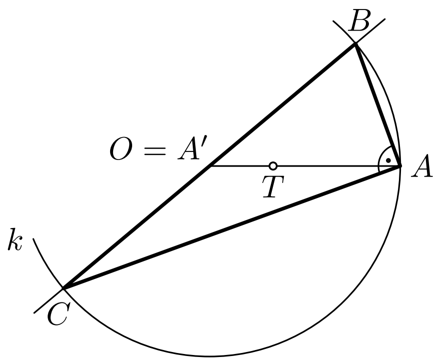


Obr. 5



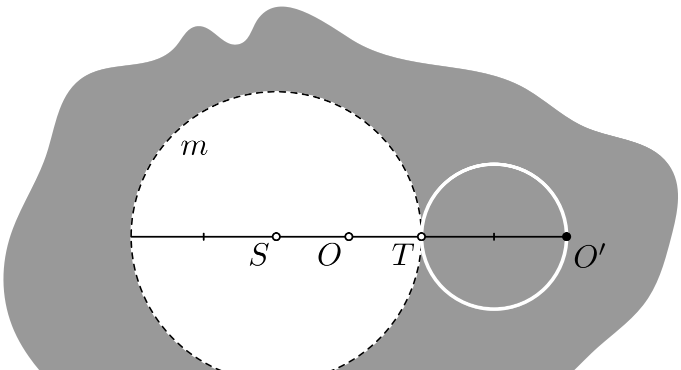
Obr. 6

V prípade, že bod A je totožný s bodom O', t. j. $A' = O$, namiesto kolmice p môžeme zobrať ľubovoľnú priamku (rôznu od AT) prechádzajúcu bodom O (obr. 7). Dostaneme tak nekonečne veľa rôznych trojuholníkov ABC s pravým uhlom pri vrchole A, ktoré spĺňajú všetky podmienky zadania.



Obr. 7

Záver. Hľadanou množinou bodov je vonkajšia oblasť kružnice m okrem bodov ležiacich na Tálesovej kružnici nad priemerom $O'T$, pričom bod O' do hľadanej množiny tiež patrí (obr. 8).



Obr. 8

Poznámka. Hľadaná množina bodov sa dá popísať analyticky bez toho, aby sme využili poznatok o Apollóniovej kružnici.