2009/2010
59. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 20. – 23. 4. 2010.*)

1. Určte všetky trojice (a, b, c) kladných reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} a\sqrt{b} - c &= a, \\ b\sqrt{c} - a &= b, \\ c\sqrt{a} - b &= c. \end{aligned}$$

(*Michal Takács*)

2. Uvažujme ľubovoľných 60 bodov v kruhu s polomerom 1. Dokážte, že na obvode kruhu existuje taký bod, že súčet jeho vzdialeností od všetkých 60 bodov nie je väčší ako 80. (*Jaromír Šimša*)

3. Nech p je prvočíslo. Dokážte, že možno zvoliť p^3 políčok na šachovnici s rozmermi $p^2 \times p^2$ tak, že stredy žiadnych štyroch zvolených políčok nie sú vrcholmi obdĺžnika so stranami rovnobežnými s okrajmi šachovnice. (*Bartłomiej Bzdęga*)

4. Nájdite najväčšie celé číslo k, pre ktoré je pravdivé nasledujúce tvrdenie: Daných je ľubovoľných 2010 nedegenerovaných trojuholníkov. V každom trojuholníku sú jeho strany ofarbené tak, že jedna je modrá, jedna je červená a jedna biela. Pre každú farbu osobitne usporiadame dĺžky strán. Dostaneme

$$\begin{aligned} &b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_{2010} && \text{pre dĺžky modrých strán,} \\ &r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_{2010} && \text{pre dĺžky červených strán,} \\ &w_1 \leqq w_2 \leqq \ldots \leqq w_{2010} && \text{pre dĺžky bielych strán.} \end{aligned}$$

Potom existuje aspoň k indexov j takých, že môžeme utvoriť nedegenerovaný trojuholník so stranami dĺžok b_j, r_j, w_j. (*Michal Rolínek*)

5. Pre kladné reálne čísla x, y, z platí $x+y+z \geqq 6$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{y^2+z+1} + \frac{y}{z^2+x+1} + \frac{z}{x^2+y+1}.$$

(*Ján Mazák*)

6. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom

$$|AB| + |CD| = \sqrt{2} \cdot |AC| \quad \text{a} \quad |BC| + |DA| = \sqrt{2} \cdot |BD|.$$

Dokážte, že $ABCD$ rovnobežník. (*Jaromír Šimša*)