2018/2019
68. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 23. – 26. 6. 2019.*)

1. Je daná kružnica ω. Body A, B, C, X, D, Y ležia na ω v tomto poradí tak, že BD je jej priemer a $|DX| = |DY| = |DP|$, kde P je priesečník AC a BD. Označme E, F postupne priesečníky priamky XP s priamkami AB, BC. Dokážte, že body B, E, F, Y ležia na jednej kružnici. (*Patrik Bak, Slovensko*)

2. Uvažujme kladné celé čísla n, ktoré majú aspoň šesť kladných deliteľov. Usporiadajme kladné delitele n do postupnosti $(d_i)_{1 \leqq i \leqq k}$ tak, že

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n \quad (k \geqq 6).$$

Nájdite všetky kladné celé čísla n spĺňajúce

$$n = d_5^2 + d_6^2.$$

(*Walther Janous, Rakúsko*)

3. Povieme, že rozdelenie konvexného mnohouholníka na konečne veľa trojuholníkov pomocou úsečiek je *trilaterácia*, ak žiadne tri vrcholy týchto trojuholníkov neležia na jednej priamke (vrcholy niektorých týchto trojuholníkov môžu ležať vnútri mnohouholníka). Povieme, že trilaterácia je *dobrá*, ak sa jej úsečky dajú nahradiť jednosmernými šípkami tak, aby šípky pozdĺž každého trojuholníka tvorili cyklus a šípky pozdĺž celého konvexného mnohouholníka taktiež tvorili cyklus. Nájdite všetky $n \geqq 3$, pre ktoré má pravidelný n-uholník dobrú trilateráciu. (*Josef Greilhuber, Rakúsko*)

4. Je dané reálne číslo α. Nájdite všetky dvojice (f, g) funkcií $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňajúcich

$$xf(x+y) + \alpha \cdot yf(x-y) = g(x) + g(y)$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Walther Janous, Rakúsko*)

5. Rozhodnite, či sa dá v rovine rozmiestniť 100 kruhov $D_2, D_3, \ldots, D_{101}$ tak, že nasledujúce podmienky sú splnené pre všetky dvojice indexov (a, b) spĺňajúcich $2 \leqq a < b \leqq 101$:

(i) Ak $a \mid b$, potom D_a je obsiahnutý v D_b.
(ii) Ak $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, potom D_a a D_b sú disjunktné.

(Kruh $D(O, r)$ je množina bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od daného bodu O neprevyšuje dané kladné reálne číslo r.)

(*Josef Greilhuber, Rakúsko, Josef Tkadlec, ČR*)

6. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC spĺňajúci $|AB| < |AC|$ a $|\measuredangle BAC| = 60°$. Označme AD, BE, CF jeho výšky a H jeho priesečník výšok. Ďalej označme K, L, M postupne stredy strán BC, CA, AB. Dokážte, že stredy úsečiek AH, DK, EL, FM ležia na jednej kružnici. (*Dominik Burek, Poľsko*)