2018/2019
68. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 15. – 20. 7. 2019.*)

1. Nájdite všetky funkcie f také, že $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a pre každé celé čísla a a b platí

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

(*Južná Afrika*)

2. Nech v trojuholníku ABC je A_1 bod na strane BC a B_1 bod na strane AC. Nech P a Q sú body postupne na úsečkách AA_1 a BB_1 také, že PQ je rovnobežná s AB. Nech P_1 je bod na priamke PB_1 taký, že B_1 leží vnútri úsečky PP_1 a platí $|\measuredangle PP_1C| = |\measuredangle BAC|$. Nech Q_1 je bod na priamke QA_1 taký, že A_1 leží vnútri úsečky QQ_1 a platí $|\measuredangle QQ_1C| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že body P, Q, P_1 a Q_1 ležia na tej istej kružnici. (*Ukrajina*)

3. Sociálna sieť má 2019 používateľov. Niektoré dvojice z nich sú priatelia, pričom ak používateľ A je priateľ používateľa B, tak používateľ B je priateľ používateľa A. Opakovane môže nastať takáto udalosť:

> Traja (rôzni) používatelia A, B a C sú takí, že A sa priatelí s B aj s C, ale B a C nie sú priatelia. V istom okamihu sa B a C spriatelia a zároveň sa A s B aj s C priateliť prestane. Všetky ostatné vzťahy pritom zostanú zachované.

Na začiatku je 1010 používateľov s 1009 priateľmi a 1009 používateľov s 1010 priateľmi. Dokážte, že existuje postupnosť takýchto udalostí, po ktorých sa každý používateľ bude priateliť najviac s jedným iným používateľom. (*Chorvátsko*)

4. Nájdite všetky dvojice (k, n) kladných celých čísel takých, že

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

(*Salvádor*)

5. Banka v Bathe používa mince, ktoré majú na jednej strane písmeno `H` a na druhej písmeno `T`. Harry má n takýchto mincí usporiadaných vedľa seba zľava doprava. Opakovane vykonáva takýto krok: Ak $k > 0$ a existuje práve k mincí, na ktorých vidno `H`, tak obráti k. mincu zľava, a ak na všetkých minciach vidno `T`, tak tento postup ukončí. (Napríklad ak $n = 3$ a počiatočná konfigurácia je `THT`, Harryho postup je `THT` $\to$ `HHT` $\to$ `HTT` $\to$ `TTT`, skončí sa teda po troch krokoch.)

a) Ukážte, že pre každú počiatočnú konfiguráciu sa Harryho proces skončí po konečnom počte krokov.
b) Nech pre každú počiatočnú konfiguráciu C označuje $L(C)$ počet krokov potrebných na to, aby sa Harryho proces skončil. (Napríklad $L(\texttt{THT}) = 3$ a $L(\texttt{TTT}) = 0$.) Určte aritmetický priemer hodnôt $L(C)$ pre všetkých 2^n počiatočných konfigurácií C.

(*USA*)

6. Nech v ostrouhlom trojuholníku ABC platí $|AB| \neq |AC|$. Kružnica ω vpísaná do ABC má stred I a dotýka sa jeho strán BC, CA, AB postupne v bodoch D, E, F. Priamka kolmá na EF prechádzajúca bodom D pretína ω v bode R rôznom od D. Priamka AR pretína ω v bode P rôznom od R. Kružnice opísané trojuholníkom PCE a PBF sa pretínajú v bode Q rôznom od P. Dokážte, že priesečník priamok DI a PQ leží na priamke prechádzajúcej bodom A a kolmej na AI. (*India*)