2009/2010
59. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 6. – 13. 7. 2010.*)

1. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$f\bigl(\lfloor x \rfloor y\bigr) = f(x)\bigl\lfloor f(y) \bigr\rfloor$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (Symbol $\lfloor z \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako z.) (*Francúzsko*)

2. Označme I stred vpísanej kružnice a Γ opísanú kružnicu trojuholníka ABC. Priamka AI pretína kružnicu Γ v bode D ($D \neq A$). Nech E je bod na oblúku BDC a F bod na strane BC, pričom

$$|\measuredangle BAF| = |\measuredangle CAE| < \tfrac{1}{2}|\measuredangle BAC|.$$

Označme G stred úsečky IF. Dokážte, že priamky DG a EI sa pretínajú na kružnici Γ. (*Hongkong*)

3. Nech $\mathbb{N}$ je množina všetkých kladných celých čísel. Určte všetky funkcie $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$\bigl(g(m) + n\bigr)\bigl(m + g(n)\bigr)$$

je štvorcom celého čísla pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$. (*USA*)

4. Nech P je vnútorný bod trojuholníka ABC. Priamky AP, BP, CP pretínajú kružnicu Γ opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch K, L, M (rôznych od A, B, C). Dotyčnica ku kružnici Γ v bode C pretína priamku AB v bode S. Predpokladajme, že $|SC| = |SP|$. Dokážte, že $|MK| = |ML|$. (*Poľsko*)

5. V každej zo šiestich truhlíc B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 je na začiatku jedna minca. Dovolené sú dva typy operácií:

Typ 1: Zvolíme neprázdnu truhlicu B_j pre nejaké $1 \leqq j \leqq 5$. Odoberieme jednu mincu z B_j a pridáme dve mince do B_{j+1}.

Typ 2: Zvolíme neprázdnu truhlicu B_k pre nejaké $1 \leqq k \leqq 4$. Odoberieme jednu mincu z B_k a vymeníme navzájom obsah truhlíc B_{k+1} a B_{k+2} (ktoré môžu byť aj prázdne).

Zistite, či existuje konečná postupnosť operácií taká, že po jej vykonaní budú truhlice B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 prázdne a truhlica B_6 bude obsahovať presne $2010^{2010^{2010}}$ mincí. (Platí $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.) (*Holandsko*)

6. Nech $a_1, a_2, a_3, \dots$ je postupnosť kladných reálnych čísel. Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo s také, že pre všetky $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \; ; \; 1 \leqq k \leqq n-1\}.$$

Dokážte, že existujú kladné celé čísla l a N také, že $l \leqq s$ a pre všetky $n \geqq N$ platí $a_n = a_l + a_{n-l}$. (*Irán*)