2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 29. novembra 2010.*)

1. Korene rovnice

$$ax^4 + bx^2 + a = 1$$

v obore reálnych čísel sú štyri po sebe idúce členy rastúcej aritmetickej postupnosti. Pritom jeden z týchto členov je zároveň riešením rovnice

$$bx^2 + ax + a = 1.$$

Určte všetky možné hodnoty reálnych parametrov a, b. (*Peter Novotný*)

2. Nech k, n sú prirodzené čísla. Z platnosti tvrdenia „číslo $(n-1)(n+1)$ je deliteľné číslom k“ Adam usúdil, že buď číslo $n-1$, alebo číslo $n+1$ je deliteľné k. Určte všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je Adamova úvaha správna pre každé prirodzené n. (*Ján Mazák*)

3. Dané sú kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL. Na kružniciach k a l zvoľme postupne body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL. (*Jaroslav Švrček*)

4. Majme $6n$ žetónov až na farbu zhodných, po troch z každej z $2n$ farieb. Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ určte počet p_n všetkých takých rozdelení $6n$ žetónov na dve kôpky po $3n$ žetónoch, že žiadne tri žetóny rovnakej farby nie sú v rovnakej kôpke. Dokážte, že p_n je nepárne číslo práve vtedy, keď $n = 2^k$ pre vhodné prirodzené k. (*Jaromír Šimša*)

5. Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre očíslovanie stien kocky na začiatku, aby po konečnom počte vhodných krokov mohli byť na všetkých stenách kocky rovnaké čísla. (*Peter Novotný*)

6. Dokážte, že v každom trojuholníku ABC s ostrým uhlom pri vrchole C (pri zvyčajnom označení dĺžok strán a veľkostí vnútorných uhlov) platí nerovnosť

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leqq 2ab.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)