

2019/2020
69. ročník MO

Zadania úloh domáceho kola kategórie C

(Termín odovzdania: v pondelok 20. januára 2020.)

1. Nájdite všetky štvorciferné čísla \overline{abcd} s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.
(Patrik Bak)

2. Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, ktorého všetky strany sú zhodné a protiľahlé strany rovnobežné. Bod P je taký, že štvoruholník $CDEP$ je rovnobežník. Dokážte, že bod P je stredom kružnice opísanej trojuholníku ACE a súčasne aj priesečníkom výšok trojuholníka BDF .
(Jakub Löwit)

3. Určte všetky dvojice prirodzených čísel a a b , pre ktoré platí

$$2[a, b] + 3(a, b) = ab,$$

pričom $[a, b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a, b) najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b .
(Jaroslav Švrček)

4. Vnútri strany BC trojuholníka ABC je daný bod K . Označme M stred strany BC a predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AK vedená bodom M pretína stranu AC vo vnútornom bode L . Dokážte, že priamka KL delí trojuholník ABC na dve časti s rovnakým obsahom.
(Josef Tkadlec)

5. Tabuľku 3×3 máme vyplniť deviatimi danými číslami tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch. Rozhodnite, či je možné takú úlohu splniť s číslami
a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ak áno, zistite, koľkými spôsobmi možno úlohu splniť tak, aby najväčšie číslo bolo uprostred tabuľky.
(Jaromír Šimša)

6. Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 1$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčtu $a + b + c$.
(Ján Mazák)