2018/2019
68. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 26. 8. – 1. 9. 2019.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spĺňajúce

$$f\bigl(xf(y) + 2y\bigr) = f(xy) + xf(y) + f\bigl(f(y)\bigr)$$

pre všetky reálne x a y. (*Patrik Bak, Slovensko*)

I-2. Nech $n \geqq 3$ je prirodzené číslo. Vrchol A_i $(1 \leqq i \leqq n)$ konvexného n-uholníka $A_1A_2\dots A_n$ nazývame *bohémsky*, ak jeho obraz v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky $A_{i-1}A_{i+1}$ ($A_0 = A_n$ a $A_{n+1} = A_1$) leží vo vnútri alebo na hranici n-uholníka $A_1A_2\dots A_n$. Určte najmenší možný počet bohémskych vrcholov konvexného n-uholníka (v závislosti od n). (*Maďarsko*)

I-3. Označme ABC ostrouhlý trojuholník, pre ktorý platí $|AC| > |BC|$ a ktorému opísaná kružnica je označená ω. Nech bod P leží na kratšom oblúku BC kružnice ω, pričom platí $|AP| = |AC|$. Priesečník priamok AP a BC označme Q. Ďalej predpokladajme, že R je bod ležiaci na kratšom oblúku AC kružnice ω, pre ktorý platí $|QA| = |QR|$. Napokon priesečník priamky BC s osou úsečky AB označme S. Dokážte, že body P, Q, R a S ležia na jednej kružnici. (*Patrik Bak, Slovensko*)

I-4. Nájdite najmenšie prirodzené n také, že z ľubovoľných n po sebe idúcich celých čísel je možné vybrať neprázdnu množinu po sebe idúcich čísel, ktorých súčet je deliteľný číslom 2019. (*Poľsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$\left(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1}\right),$$

kde a, b a c sú nezáporné reálne čísla spĺňajúce podmienku $ab+bc+ca = 1$. (*Rakúsko*)

T-2. Nech α je ľubovoľné reálne číslo. Nájdite všetky polynómy P s reálnymi koeficientmi také, že pre všetky reálne čísla x platí

$$P(2x+\alpha) \leqq \bigl(x^{20} + x^{19}\bigr)\, P(x).$$

(*Rakúsko*)

T-3. V triede je n chlapcov a n dievčat, kde n je prirodzené číslo. Výšky všetkých žiakov v triede sú po dvoch rôzne. Každé dievča odčíta od počtu chlapcov vyšších ako ona počet dievčat vyšších ako ona a výsledok napíše na kúsok papiera. Každý chlapec odčíta od počtu dievčat nižších ako on počet chlapcov nižších ako on a výsledok napíše na kúsok papiera. Dokážte, že čísla, ktoré napísali dievčatá, sú (až na poradie) tie isté ako čísla, ktoré napísali chlapci. (*Rakúsko*)

T-4. Dokážte, že každé celé číslo od 1 po 2019 sa dá zapísať ako aritmetický výraz obsahujúci najviac 17 symbolov 2 a ľubovoľný počet sčítaní, odčítaní, násobení, delení a zátvoriek. Symboly 2 nemôžu byť použité na nijakú inú operáciu, napríklad skladanie viacciferných čísel (ako 222) alebo mocnín (ako 2^2).

Príklady povolených výrazov:

$$\left((2\times 2+2)\times 2-\frac{2}{2}\right)\times 2=22,\quad (2\times 2\times 2-2)\times\left(2\times 2+\frac{2+2+2}{2}\right)=42.$$

(*Rakúsko*)

T-5. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník spĺňajúci $|AB| < |AC|$. Nech D je bod prieniku osi úsečky BC a strany AC. Nech P je bod na kratšom oblúku AC kružnice opísanej trojuholníku ABC taký, že $DP \parallel BC$. Nech je ďalej M stred strany AB. Dokážte, že $|\measuredangle APD| = |\measuredangle MPB|$. (*Poľsko*)

T-6. Nech ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole B a opísanou kružnicou c. Označme D stredný bod kratšieho oblúka AB kružnice c. Nech P je bod na strane AB taký, že platí $|CP| = |CD|$ a nech sú X a Y dva rozličné body na c spĺňajúce $|AX| = |AY| = |PD|$. Dokážte, že body X, Y a P ležia na jednej priamke. (*Poľsko*)

T-7. Nech a, b, c sú kladné celé čísla spĺňajúce $a < b < c < a+b$. Dokážte, že $c(a-1)+b$ nedelí $c(b-1)+a$. (*Švajčiarsko*)

T-8. Nech N je kladné celé číslo také, že súčet druhých mocnín jeho kladných deliteľov sa rovná číslu $N(N+3)$. Dokážte, že potom existujú indexy i a j také, že $N = F_i \cdot F_j$, kde $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ je Fibonacciho postupnosť definovaná vzťahom $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pre všetky $n \geqq 3$. (*Poľsko*)