2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 10. januára 2011.*)

1. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2}&=z+1,\\ \sqrt{y^2+z^2}&=x+1,\\ \sqrt{z^2+x^2}&=y+1.\end{aligned}$$

(*Tomáš Jurík*)

2. Uvažujme vnútorný bod P daného obdĺžnika $ABCD$ a označme postupne Q, R obrazy bodu P v súmernostiach podľa stredov A, C. Predpokladajme, že priamka QR pretne strany AB a BC vo vnútorných bodoch M a N. Zostrojte množinu všetkých bodov P, pre ktoré platí $|MN| = |AB|$. (*Jaroslav Švrček*)

3. Nech a, b, c sú reálne čísla, ktorých súčet je 6. Dokážte, že aspoň jedno z čísel

$$ab+bc, \quad bc+ca, \quad ca+ab$$

nie je väčšie ako 8. (*Ján Mazák*)

4. Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je zlomok

$$\frac{n^3+2\,010}{n^2+2\,010}$$

rovný celému číslu. (*Pavel Novotný*)

5. Zaoberajme sa otázkou, ktoré trojuholníky ABC s ostrými uhlami pri vrcholoch A a B majú nasledujúcu vlastnosť: Ak vedieme stredom výšky z vrcholu C tri priamky rovnobežné so stranami trojuholníka ABC, pretnú ich tieto priamky v šiestich bodoch ležiacich na jednej kružnici.

a) Ukážte, že vyhovuje každý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C.
b) Vysvetlite, prečo žiadny iný trojuholník ABC nevyhovuje. (*Jaromír Šimša*)

6. Určte počet desaťciferných čísel, v ktorých možno škrtnúť dve susedné cifry a dostať tak číslo 99-krát menšie. (*Ján Mazák*)