2018/2019
68. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 19. – 22. 5. 2019.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b, pre ktoré platí

$$\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}+\sqrt{b}.$$

(*Patrik Bak, Slovensko*)

I-2. Daný je trojuholník ABC s ťažiskom T. Označme M stred strany BC. Na polpriamke opačnej k BA leží bod D taký, že $|AB| = |BD|$. Podobne na polpriamke opačnej k CA leží bod E taký, že $|AC| = |CE|$. Úsečky TD, TE pretínajú stranu BC postupne v bodoch P, Q. Dokážte, že body P, Q, M rozdeľujú úsečku BC na štyri rovnako dlhé časti. (*Patrik Bak, Slovensko*)

I-3. Pre ktoré prirodzené čísla n sa dá tabuľka $n \times n$ vyplniť číslami 1, 2 a -3 tak, aby súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci bol 0? (*Ján Mazák, Slovensko*)

I-4. Daná je kružnica k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB zvolíme ľubovoľný bod C a potom na kružnici k vyberieme bod D tak, aby vznikol ostrouhlý trojuholník BCD, ktorého opísaná kružnica má stred v bode, ktorý označíme O. Nech ešte E označuje priesečník kružnice k s priamkou BO (rôzny od bodu B). Dokážte, že trojuholníky BCD a ECA sú podobné. (*Jaromír Šimša, Česká rep.*)

I-5. V skupine osôb má každý práve d známych a každí dvaja, ktorí sa nepoznajú, majú práve jedného spoločného priateľa. Dokážte, že počet osôb v tejto skupine nie je väčší ako $d^2 + 1$. (*Łukasz Bożyk, Poľsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Jsou dána racionální čísla a, b taková, že čísla $a + b$ a $a^2 + b^2$ jsou celá. Dokažte, že čísla a, b jsou celá. (*Łukasz Bożyk, Poľsko*)

T-2. Šachová figurka *nemocná věž* se pohybuje po řádcích a sloupcích jako obyčejná věž, ale nejvýše o 2 políčka. Nemocné věže budeme na čtvercovou šachovnici rozmísťovat tak, aby se žádné dvě z nich navzájem neohrožovaly a aby neexistovalo žádné pole ohrožené více než jednou věží.

a) Dokažte, že na šachovnici 30×30 takto nelze rozmístit více než 100 nemocných věží.
b) Určete největší možný počet nemocných věží, které lze takto rozmístit na šachovnici 8×8.
c) Dokažte, že na šachovnici 32×32 takto nelze rozmístit více než 120 nemocných věží.

(*Ján Mazák, Slovensko*)

T-3. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym o prostopadłych przekątnych, w którym $\measuredangle BAC = \measuredangle ADB$, $\measuredangle CBD = \measuredangle DCA$, $AB = 15$, $CD = 8$. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg oraz wyznacz odległość między środkiem tego okręgu a punktem przecięcia przekątnych czworokąta. (*Ján Mazák, Slovensko*)

T-4. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia $xy + yz + zx$, gdzie liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2.$$

(*Jaroslav Švrček, Česká rep.*)

T-5. Daný je pravidelný 360-uholník $A_1A_2 \dots A_{360}$ so stredom S. Pre každý z trojuholníkov $A_1A_{50}A_{68}$ a $A_1A_{50}A_{69}$ rozhodnite, či jeho obrazy v 120 vhodných otočeniach so stredom S môžu mať (ako trojuholníky) za vrcholy všetkých 360 bodov $A_1, A_2, \dots, A_{360}$. (*Jaromír Šimša, Česká rep.*)

T-6. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Na stranách AB, BC, CD, DA ležia postupne body K, L, M, N, pričom

$$|\measuredangle ADK| = |\measuredangle BCK|, \qquad |\measuredangle BAL| = |\measuredangle CDL|,$$
$$|\measuredangle CBM| = |\measuredangle DAM|, \qquad |\measuredangle DCN| = |\measuredangle ABN|.$$

Dokážte, že priamky KM a LN sú na seba kolmé.

(*Łukasz Bożyk, Tomasz Przybyłowski, Poľsko*)