SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

69. ročník, školský rok 2019/2020

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 69. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **2. decembra 2019** (kategória **A**) a do **20. januára 2020** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2020 v Rusku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2020 v Rakúsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude na konci augusta 2020 na Slovensku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2020 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 69. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	10. 12. 2019	14. 01. 2020	22. – 25. marca 2020
Kategórie B, C	28. 01. 2020	31. 03. 2020	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2019/2020
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

69. ročník Školský rok 2019 / 2020 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

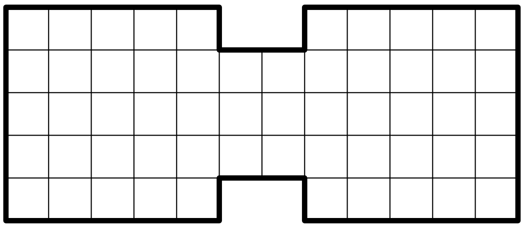
Pre kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokážte, že potom nutne platí $a > c > d > b$. (*Michal Rolínek*)

A – I – 2

Dokážte, že počet možností, ako sa dá útvar na obrázku vydláždiť dominovými kockami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kocka pokrýva vždy dve políčka susediace stranou.) (*Josef Tkadlec*)



A – I – 3

Vnútri strán AB a AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body P a Q. Označme R priesečník priamok BQ a CP a p, q, r postupne vzdialenosti bodov P, Q, R od priamky BC. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(*Patrik Bak*)

A – I – 4

Hovoríme, že podmnožina P množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, \ldots, 42\}$ je *polovičatá*, ak obsahuje 21 prvkov a každé zo 42 čísel v množinách P a $\mathsf{Q} = \{7x;\ x \in \mathsf{P}\}$ dáva po delení číslom 43 iný zvyšok. Určte počet polovičatých podmnožín množiny M. (*Josef Tkadlec*)

A – I – 5

V rovine sú dané dva rôzne body O a A. Určte množinu ortocentier všetkých trojuholníkov ABC, pre ktoré je bod O stredom kružnice opísanej. (*Pavel Šalom*)

A – I – 6

Nájdite všetky trojice a, b, c kladných celých čísel takých, že súčin

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$$

je rovný mocnine niektorého prvočísla. (*Jaromír Šimša*)

****

KATEGÓRIA B

B – I – 1

V reálnom obore uvažujme sústavu rovníc

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$

$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

s nenulovým reálnym parametrom a.

a) Nájdite všetky hodnoty a, pre ktoré má uvedená sústava riešenie.

b) Dokážte, že pre ľubovoľné riešenie (x, y) tejto sústavy platí $x^2 + |y| \geqq 4$. (*Ján Mazák*)

B – I – 2

Prirodzené číslo n má aspoň 73 dvojciferných deliteľov. Dokážte, že jedným z nich je číslo 60. Uveďte tiež príklad čísla n, ktoré má práve 73 dvojciferných deliteľov, vrátane náležitého zdôvodnenia. (*Josef Tkadlec*)

B – I – 3

Nech AC je priemer kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $ABCD$. Predpokladajme, že na polpriamkach opačných k polpriamkam AD a DC existujú postupne body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ také, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokážte tvrdenia:

a) Body A', B, C' a D ležia na jednej kružnici k.

b) Ak je O stred kružnice k a O_A, O_C sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom $AA'B$, $CC'B$, tak platí $OO_A \perp OO_C$. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Nech p, q sú dané nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak má rovnica

$$px^2 - (p + q)x + p = 0$$

celočíselný koreň, tak má celočíselný koreň aj rovnica

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0.$$

(*Patrik Bak*)

B – I – 5

Dané sú kružnice $a(A; r_a)$, $b(B; r_b)$, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode T. Ich spoločná vonkajšia dotyčnica sa dotýka kružnice a v bode T_a a kružnice b v bode T_b. Pomocou r_a, r_b vyjadrite pomer polomerov kružníc k_a, k_b opísaných postupne trojuholníkom T_aAT, T_bBT. (*Šárka Gergelitsová*)

B – I – 6

Figúrka strelca ohrozuje na šachovnici ľubovoľné políčko diagonály, na ktorej strelec stojí. Ak však na niektorom políčku diagonály stojí veža, strelec už políčka za ňou neohrozuje. Určte najväčší možný počet strelcov, ktorých môžeme spolu so štyrmi vežami umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa strelci navzájom neohrozovali. (*Ján Mazák*)

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ s ciferným súčtom 12 také, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. (*Patrik Bak*)

C – I – 2

Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, ktorého všetky strany sú zhodné a protiľahlé strany rovnobežné. Bod P je taký, že štvoruholník $CDEP$ je rovnobežník. Dokážte, že bod P je stredom kružnice opísanej trojuholníku ACE a súčasne aj priesečníkom výšok trojuholníka BDF.

(*Jakub Löwit*)

C – I – 3

Určte všetky dvojice prirodzených čísel a a b, pre ktoré platí

$$2[a, b] + 3(a, b) = ab,$$

pričom $[a, b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a, b) najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Vnútri strany BC trojuholníka ABC je daný bod K. Označme M stred strany BC a predpokladajme, že rovnobežka s priamkou AK vedená bodom M pretína stranu AC vo vnútornom bode L. Dokážte, že priamka KL delí trojuholník ABC na dve časti s rovnakým obsahom.

(*Josef Tkadlec*)

C – I – 5

Tabuľku 3×3 máme vyplniť deviatimi danými číslami tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo najväčšie číslo súčtom ostatných dvoch. Rozhodnite, či je možné takú úlohu splniť s číslami

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ak áno, zistite, koľkými spôsobmi možno úlohu splniť tak, aby najväčšie číslo bolo uprostred tabuľky. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqq 1$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu súčtu $a + b + c$. (*Ján Mazák*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

69. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Bc. Patrik Bak, RNDr. Šárka Gergelitsová, PhD., Jakub Löwit, RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Michal Rolínek, PhD., Mgr. Pavel Šalom, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Bc. Josef Tkadlec
Recenzenti:	Bc. Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD.,
Redakčná úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019