SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta riadenia a informatiky, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

69. ročník, školský rok 2019/2020

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 69. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **2. decembra 2019** (kategória **A**) a do **20. januára 2020** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2020 v Rusku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2020 v Rakúsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude na konci augusta 2020 na Slovensku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2020 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 69. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	10. 12. 2019	14. 01. 2020	22. – 25. marca 2020
Kategórie B, C	28. 01. 2020	31. 03. 2020	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2019/2020
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

69 MO

MATEMATIKA OLIMPIA

69-ik évfolyam 2019/2020-es tanév Házi forduló

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

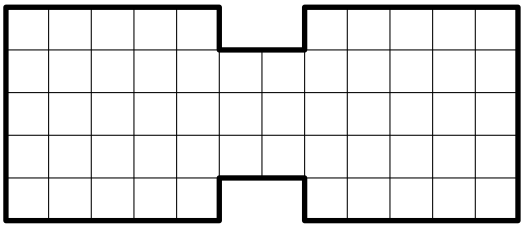
Az $a > b$, $c > d$ egyenlőtlenségeket teljesítő a, b, c, d pozitív valós számokra fennállnak az

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd$$

egyenlőtlenségek. Bizonyítsd be, hogy ekkor szükségképpen $a > c > d > b$. (*Michal Rolínek*)

A – I – 2

Bizonyítsd be, hogy az ábrán látható alakzat dominókkal való összes lefedésének száma négyzetszám! (Egy dominó mindig két oldalszomszédos mezőt fed le.) (*Josef Tkadlec*)



A – I – 3

Az adott ABC háromszög AB és AC oldalainak belsején rendre felvettük a P és Q pontokat. Jelölje R a BQ és CP egyenesek metszéspontját, valamint legyen rendre p, q és r a P, Q és R pontok BC egyenestől mért távolsága. Bizonyítsd be, hogy fennáll az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}$$

egyenlőtlenség! (*Patrik Bak*)

A – I – 4

Azt mondjuk, hogy az $M = \{1, 2, 3, \ldots, 42\}$ halmaz P részhalmaza *feles*, ha 21 eleme van és a P és $Q = \{7x;\ x \in P\}$ halmazokban szereplő összesen 42 szám mindegyike 43-mal osztva különböző maradékot at. Határozd meg az M halmaz összes feles részhalmazának számát! (*Josef Tkadlec*)

A – I – 5

A síkban adott két különböző O és A pont. Határozd meg azon ABC háromszögek magasságpontjainak halmazát, amelyeknek O a köréírt körük középpontja! (*Pavel Šalom*)

A – I – 6

Keresd meg az összes olyan pozitív egész számokból álló a, b, c számhármast amelyekre az

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$$

szorzat egy prímszám hatványával egyenlő! (*Jaromír Šimša*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

A valós számok halmazán tekintsük az

$$x^4 + y^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3,$$

$$x^4 - y^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3$$

egyenletrendszert, ahol a nullától különböző valós paraméter.

a) Keresd meg az a paraméter összes olyan értékét, amelyre az egyenletrendszernek van megoldása.

b) Bizonyítsd be, hogy az egyenletrendszer tetszőleges (x, y) megoldására fennáll: $x^2 + |y| \geqq 4$.

(*Ján Mazák*)

B – I – 2

Az n természetes számnak legalább 73 kétjegyű osztója van. Bizonyítsd be, hogy az osztók egyike a 60. Mutass egy olyan n természetes számot, amelynek pontosan 73 kétjegyű osztója van. Válaszodat indokold meg! (*Josef Tkadlec*)

B – I – 3

Legyen AC az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körének átmérője. Tegyük fel, hogy az AD és DC félegyenesekkel ellentétes félegyeneseken léteznek azok az $A' \neq A$ és $C' \neq D$ pontok, amelyekre $|AB| = |A'B|$ és $|BC| = |BC'|$. Bizonyítsd be a következő állításokat:

a) Az A', B, C' és D egy k körvonalra illeszkednek.

b) Ha a k körvonal középpontja O és O_A, O_C rendre az $AA'B$, $CC'B$ háromszögek körülírt körének középpontjai, akkor $OO_A \perp OO_C$. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Legyenek adottak a p, q természetes számok, amelyek relatív prímek. Bizonyítsd be, hogy ha a

$$px^2 - (p+q)x + p = 0$$

egyenletnek van egész gyöke, akkor van egész gyöke a

$$px^2 + qx + p^2 - q = 0$$

egyenletnek is! (*Patrik Bak*)

B – I – 5

Adottak az $a(A; r_a)$ és $b(B; r_b)$ körvonalak, amelyek egymást kívülről a T pontban érintik. A külső közös érintőjük az a körvonalat a T_a pontban a b körvonalat pedig a T_b pontban érinti. Az r_a és r_b segítségével írd fel a T_aAT és T_bBT háromszögek köré írt k_a, k_b körök sugarainak arányát! (*Šárka Gergelitsová*)

B – I – 6

A futó a sakktáblán az összes olyan mezőt veszélyezteti, amely ugyanazon az átlón helyezkedik el, amelyiken a futó áll. Viszont, ha az átló valamelyik mezőjén bástya áll, akkor a futó már a mögötte levő mezőket nem veszélyezteti. Határozd meg a futók lehető legnagyobb számát, amelyek négy bástyával elhelyezhetők egy 8×8-as sakktáblán úgy, hogy a futók egymást ne veszélyeztessék! (*Ján Mazák*)

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Keresd meg az összes olyan négyjegyű $\overline{abcd}$ számot, amelyben a számjegyek összege 12, valamint $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. (*Patrik Bak*)

C – I – 2

Adott az $ABCDEF$ konvex hatszög, melynek oldalai egyforma hosszúságúak, a szemközti oldalak pedig párhuzamosak. A P egy olyan pont, amelyre a $CDEP$ négyszög parallelogramma. Bizonyítsd be, hogy a P pont az ACE háromszög köré írt körének középpontja, s egyúttal a BDF háromszög magasságpontja is! (*Jakub Löwit*)

C – I – 3

Határozd meg az összes a és b természetes számokból álló számpárt, amelyre:

$$2[a, b] + 3(a, b) = ab,$$

ahol $[a, b]$ az a és b számok legkisebb közös többszörösét, (a, b) pedig a legnagyobb közös osztóját jelöli. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Legyen K az ABC háromszög BC oldalának egy belső pontja. Jelölje M a BC oldal középpontját és tegyük fel, hogy az AK-val párhuzamos M pontot tartalmazó egyenes az AC oldalat a belső L pontjában metszi. Bizonyítsd be, hogy a KL egyenes az ABC háromszöget két egyenlő területű részre bontja! (*Josef Tkadlec*)

C – I – 5

Egy 3×3-as táblázatot ki akarunk tölteni kilenc adott számmal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a legnagyobb szám a másik két szám összege legyen. Döntsd el, hogy teljesíthető-e ez a feladat, ha az adott számok

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Pozitív válasz esetén határozd meg, hogy hányféleképpen teljesíthető a feladat úgy, hogy a legnagyobb szám a táblázat közepén legyen elhelyezve. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Az a, b, c pozitív valós számokra $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqq 1$. Határozd meg az $a + b + c$ összeg lehető legnagyobb értékét! (*Ján Mazák*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

69. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Bc. Patrik Bak, RNDr. Šárka Gergelitsová, PhD., Jakub Löwit, RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Michal Rolínek, PhD., Mgr. Pavel Šalom, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Bc. Josef Tkadlec
Recenzenti:	Bc. Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD.,
Redakčná úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019